

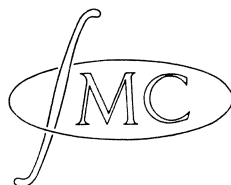
STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 323

Syllabus van het
Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening
o.l.v. Prof.dr. J.Th. Runnenburg

RANDOM WALK PROBLEMEN



april 1964

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof. Dr. J.Th. Runnenburg

1963/64

Random walk problemen

Literatuur: Kemperman, The passage problem for a stationary Markov chain, speciaal blz 41-47, Univ. of Chicago Press, 1961.

Beschouw

$$(1) \quad \underline{s}_n = \underline{s}_0 + \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

met onderling onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{s}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ en gelijkverdeelde $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ met

$$(2) \quad P\{\underline{x}_n = j\} = p_j, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j = 1.$$

Ook $\underline{s}_0$ neemt per definitie slechts gehele waarden aan. Voor $|w|=1$ voeren we in

$$(3) \quad \psi(w) \stackrel{\text{def}}{=} E w^{\underline{x}_n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j w^j,$$

zodat

$$(4) \quad \{\psi(w)\}^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j^{(n)} w^j$$

voor $n = 0, 1, 2, \dots$ met

$$(5) \quad p_j^{(n)} = \begin{cases} P\{\underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n = j\} & \text{als } n \geq 1, \\ \delta_{j0} & \text{als } n = 0. \end{cases}$$

In feite hebben we hier te doen met een speciale stationaire Markov keten:

$$(6) \quad P\{\underline{s}_n = j \mid \underline{s}_0 = i_0, \underline{s}_1 = i_1, \dots, \underline{s}_{n-2} = i_{n-2}, \underline{s}_{n-1} = i\} \\ = P\{\underline{s}_n = j \mid \underline{s}_{n-1} = i\} = p_{j-i}.$$

Bovendien geldt, onafhankelijk van k geheel ≥ 0 ,

$$(7) \quad P\{\underline{s}_{n+k} = j \mid \underline{s}_k = i\} = P\{\underline{x}_{k+1} + \dots + \underline{x}_{k+n} = j-i\} = p_{j-i}^{(n)}.$$

Beschouw voor $|z| < 1$

$$(8) \quad P_j(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_j^{(n)} z^n, \quad F_j(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} z^n,$$

met (onafhankelijk van i)

$$(9) \quad f_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{s}_1 \neq i+j, \underline{s}_2 \neq i+j, \dots, \underline{s}_{n-1} \neq i+j, \underline{s}_n = i+j \mid \underline{s}_0 = i\}.$$

Wegens

$$(10) \quad p_j^{(n)} = P\{\underline{s}_n = j \mid \underline{s}_0 = 0\} = \sum_{i=1}^n P\{\underline{s}_1 \neq j, \dots, \underline{s}_{i-1} \neq j, \underline{s}_i = j \text{ en } \underline{s}_n = j \mid \underline{s}_0 = 0\} = \sum_{i=1}^n P\{\underline{s}_1 \neq j, \underline{s}_2 \neq j, \dots, \underline{s}_{i-1} \neq j, \underline{s}_i = j \mid \underline{s}_0 = 0\} \cdot P\{\underline{s}_n = j \mid \underline{s}_i = j\} = \sum_{i=1}^n f_j^{(i)} p_0^{(n-i)}$$

geldt voor $j \neq 0$

$$(11) \quad P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_j^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n f_j^{(i)} p_0^{(n-i)} \right) z^n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=i}^{\infty} p_0^{(n-i)} z^{n-i} \right) f_j^{(i)} z^i = P_0(z) F_j(z),$$

terwijl voor $j=0$

$$(12) \quad P_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0^{(n)} z^n = 1 + P_0(z) F_0(z).$$

Blijkbaar geldt dus

$$(13) \quad F_j(z) = \begin{cases} \frac{P_j(z)}{P_0(z)} & \text{voor } j \neq 0, \\ 1 - \frac{1}{P_0(z)} & \text{voor } j=0. \end{cases}$$

De reeks voor $\psi(w)$ is uniform convergent voor $|w|=1$, zodat

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \{\psi(w)\}^n w^{-k-1} dw = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint p_j^{(n)} w^{j-k-1} dw = p_k^{(n)}.$$

Daar $|\psi(w)| \leq 1$ voor $|w|=1$, volgt voor $|z| < 1$

$$(15) \quad P_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{(n)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \{\psi(w)\}^n w^{-k-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w^{-k-1}}{1-z\psi(w)} dw.$$

Voorlopig maken we de volgende veronderstelling: er bestaat een positief geheel getal r met

$$(16) \quad p_j = 0 \text{ voor } j < -r, p_{-r} \neq 0.$$

Dan is dus

$$(17) \quad \psi(w) = \sum_{j=-r}^{\infty} p_j w^j$$

voor $0 < |w| \leq 1$ continu en éénwaardig, voor $0 < |w| < 1$ is $\psi(w)$ holomorf. *) In 0 heeft $\psi(w)$ een pool van de orde r .

Lemma 1. Voor elke z met $0 < |z| < 1$ heeft $\psi(w) = z^{-1}$ juist r wortels $\xi_1(z), \xi_2(z), \dots, \xi_r(z)$ in $|w| < 1$. Meervoudige wortels dienen hierbij meervoudig geteld te worden. Er geldt $0 < |\xi_\rho(z)| < 1$ voor $1 \leq \rho \leq r$.

Bewijs: Wegens $|w^r \psi(w)| < |w^r z^{-1}|$ voor $|w| = 1$ heeft $w^r \psi(w) + -w^r z^{-1}$ evenveel nulpunten in $|w| < 1$ als $w^r z^{-1}$ volgens de stelling van Rouché ("als $f(z)$ en $g(z)$ binnen een contour holomorf zijn en op en binnen de contour continu, terwijl $|f(z)| < |g(z)|$ op de contour, dan hebben $g(z)$ en $f(z)+g(z)$ evenveel nulpunten binnen de contour"). Omdat $w^r z^{-1}$ als functie van w r nulpunten in $|w| < 1$ heeft, is dit ook het geval met $w^r \psi(w) - w^r z^{-1}$. Omdat 0 géén nulpunt is van de

*) Complex differentiëerbaar in een omgeving van elk punt van het beschouwde (open) gebied.

laatste functie, heeft ook $\psi(w) \cdot z^{-1}$ precies r nulpunten in $|w| < 1$, die ongelijk 0 zijn, en geen andere.

We kunnen voor willekeurige gehele n de $p_j^{(n)}$ invoeren via

$$(18) \quad \{\psi(w)\}^n = \sum_{j=-rn}^{\infty} p_j^{(n)} w^j,$$

althans voor voldoende kleine $|w| > 0$. Voor $n \geq 0$ houden we dezelfde $p_j^{(n)}$ als voorheen.

$P_k(z)$ kan door residuberekening verkregen worden. Er geldt

$$(19) \quad P_k(z) = (\text{res in } 0 + \text{res in } \xi_1 + \dots + \text{res in } \xi_r) \text{ van } \{1 - z \psi(w)\}^{-1} w^{-k-1},$$

met

$$(20) \quad \Delta_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{res in } 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \{1 - z \psi(w)\}^{-1} w^{-k-1} dw = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \{z \psi(w)\}^{-n} w^{-k-1} dw = - \sum_{n=1}^{\lfloor k/r \rfloor} p_k^{(-n)} z^{-n}.$$

Speciaal geldt dus

$$(21) \quad \Delta_k(z) = 0 \quad \text{voor } k < r.$$

Voor het residu in $\xi_\rho \stackrel{\text{afk}}{=} \xi_\rho(z)$ vinden we, als $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ verschillend zijn

$$(22) \quad \text{res in } \xi_\rho = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\xi_\rho|=\varepsilon} \{1 - z \psi(w)\}^{-1} w^{-k-1} dw = \\ = \lim_{w \rightarrow \xi_\rho} \frac{(w - \xi_\rho)^{-k-1}}{1 - z \psi(w)} = - \frac{\xi_\rho^{-k-1}}{z \psi'(\xi_\rho)}.$$

We kunnen het bewezene aldus opsommen:

Lemma 2. Voor elke z met $0 < |z| < 1$, waarbij $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ verschillend zijn, geldt

$$(23) \quad P_k(z) = \Delta_k(z) - \sum_{\rho=1}^r \frac{\xi_\rho^{-k-1}}{z \psi'(\xi_\rho)}.$$

Opmerking: als $|z|$ dicht bij 0 gekozen wordt, dan moet $\psi(w)$ voor een nulpunt van $\psi(w) - \frac{1}{z}$ een grote waarde aannemen. Als het om voldoende kleine $|z|$ gaat, volgt uit $\psi(w) - \frac{1}{z} = 0$ de relatie $p_{-r} w^{-r} - \frac{1}{z} \approx 0$ of

$\xi_\rho \approx e^{\frac{2\pi i \rho}{r}} \sqrt[r]{|p_{-r} z|}$ voor $1 \leq \rho \leq r$. Alle wortels zijn dan dus verschillend (hun volgorde is hier arbitrair gekozen).

We voeren verder in voor gehele i en k en niet-negatieve n en λ

$$(24) \quad Q_{ik}^{(n)}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{s}_n = k, \text{ precies } \lambda \text{ der } \underline{s}_0, \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \\ \text{zijn } 0 | \underline{s}_0 = i\}$$

en

$$(25) \quad \bar{Q}_{ik}^{(n)}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} Q_{ik}^{(n)}(\lambda).$$

Als $\underline{a}_1$ het aantal "stappen" is, nodig om toestand 0 voor het eerst te bereiken vanuit toestand $i \neq 0$ en $\underline{b}$ het aantal stappen is, nodig om in toestand 0 voor het eerst terug te keren vanuit toestand 0, dan geldt voor $i \neq 0$ en $\mu \geq 1$

$$(26) \quad \bar{Q}_{ik}^{(n)}(\mu) = \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_\mu = n \\ j_0 \geq 1, j_1 \geq 1, \dots, j_{\mu-1} \geq 1, j_\mu \geq 0}} P\{\underline{a}_1 = j_0, \underline{b}_1 = j_1, \dots, \underline{b}_{\mu-1} = j_{\mu-1}, \underline{s}_n = k\} = \\ = \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_\mu = n \\ j_0 \geq 1, j_1 \geq 1, \dots, j_{\mu-1} \geq 1, j_\mu \geq 0}} P\{\underline{a}_1 = j_0\} P\{\underline{b}_1 = j_1\} \dots P\{\underline{b}_{\mu-1} = j_{\mu-1}\} p_k^{(j_\mu)}.$$

Dan is

$$(27) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_{ik}^{(n)}(\mu) z^n = F_{-i}(z) \{F_0(z)\}^{\mu-1} P_k(z) = \\ = \frac{P_{-i}(z)}{P_0(z)} \left\{1 - \frac{1}{P_0(z)}\right\}^{\mu-1} P_k(z);$$

het eerste en het derde lid zijn ook aan elkaar gelijk voor $i=0$.

Trekken we van dit resultaat het overeenkomstige met $\mu+1$ i.p.v. μ af, dan volgt (met λ i.p.v. μ)

$$(28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ik}^{(n)}(\lambda) z^n = \frac{P_{-i}(z)}{P_0(z)} \left\{1 - \frac{1}{P_0(z)}\right\}^{\lambda-1} \frac{P_k(z)}{P_0(z)}$$

voor $\lambda \geq 1$. Dit resultaat is óók correct voor $i=0$.

Voorlopig nemen we

$$(29) \quad r = 1.$$

Dan geldt voor $0 < |w| < 1$

$$(30) \quad \psi(w) = \sum_{j=-1}^{\infty} p_j w^j,$$

terwijl de vergelijking $\psi(w) = \frac{1}{z}$ voor elke z met $0 < |z| < 1$ precies één wortel in $|w| < 1$ heeft, die we met ξ of $\xi(z)$ aangeven. De toevoeging $z \rightarrow \xi(z)$ is zelfs eeneenduidig. Altijd is $\xi \neq 0$ en voor $0 < |z| < 1$ geldt $0 < |\xi(z)| < 1$. Met lemma 2 volgt

$$(31) \quad P_k(z) = - \sum_{n=1}^k p_k^{(-n)} z^{-n} - \frac{\xi^{-k-1}}{z \psi'(\xi)},$$

zodat

$$(32) \quad P_0(z) = - \frac{\xi^{-1}}{z \psi'(\xi)}.$$

We kunnen voor alle gehele k op grond van (31) schrijven, met (32),

$$(33) \quad \sum_{n=-k}^{\infty} p_k^{(n)} z^n = \sum_{n=-k}^{-1} p_k^{(n)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{(n)} z^n = P_0(z) \xi^{-k}.$$

Het rechterlid van (28) kunnen we op dit ogenblik als functie van z en $\xi(z)$ uitdrukken. Maar ook $\xi(z)$ is voor voldoende kleine $|z|$ een machtreeks in z , want er geldt

$$(34) \quad \frac{p_{-1}}{\xi} + p_0 + p_1 \xi + \dots = \frac{1}{z}$$

of

$$(35) \quad z = \frac{\xi}{p_{-1} + p_0 \xi + p_1 \xi^2 + \dots},$$

zodat z een holomorfe functie van ξ is in een cirkel met $\xi=0$ als middelpunt. Dan is ξ een holomorfe functie van z in een cirkel met $z=0$ als middelpunt. Tevens geldt

$$(36) \quad \xi \approx p_{-1} z$$

voor voldoende kleine z (of ξ). Elke gehele macht van ξ bezit dus een Laurentontwikkeling naar z in $0 < |z| < \delta$ voor een $\delta > 0$.

Lemma 3. Er geldt

$$(37) \quad \{\xi(z)\}^k = \sum_{\substack{n=k \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{k}{n} p_{-k}^{(n)} z^n + a_k$$

met

$$(38) \quad a_k \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{w^k \psi'(w)}{\psi(w)} dw.$$

Dit bewijzen we door de coëfficiënten uit de Laurentreeks stuk voor stuk te berekenen. Voor $n \neq 0$ geeft integratie over $|z| = \varepsilon$

$$\begin{aligned}
 (39) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \{\xi(z)\}^k z^{-n-1} dz &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \{\xi(z)\}^k dz z^{-n} = \\
 &= -\frac{1}{n} \left[\frac{1}{2\pi i} \{\xi(z)\}^k z^{-n} \right]_{z=\xi}^{z=\xi} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-n} d\{\xi(z)\}^k = \\
 &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \{\psi(\xi)\}^n d\xi^k = \frac{k}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \{\psi(\xi)\}^n \xi^{k-1} d\xi = \\
 &= \frac{k}{n} p_{-k}^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Als $n < k$, $n \neq 0$, dan is $p_{-k}^{(n)}$ tengevolge van onze definities 0. Voor $n=0$ geldt, wegens

$$(40) \quad 0 = \frac{d}{dz} 1 = \frac{d}{dz} z \psi(\xi(z)) = \psi(\xi(z)) + z \psi'(\xi(z)) \cdot \xi'(z),$$

dat

$$\begin{aligned}
 (41) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \{\xi(z)\}^k z^{-1} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \{\xi(z)\}^k \frac{\psi'(\xi(z))}{\psi(\xi(z))} \xi'(z) dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\xi^k \psi'(\xi)}{\psi(\xi)} d\xi = a_k.
 \end{aligned}$$

Voorbeelden

I. Neem $\mu=1$, $i \geq 0$, $k \geq 0$. Dan geldt volgens (27)

$$(42) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_{ik}^{(n)}(1) z^n = \frac{P_{-i}(z) P_k(z)}{P_0(z)}$$

met volgens (31) en (32)

$$\begin{aligned}
 (43) \quad P_{-i}(z) &= P_0(z) \{\xi(z)\}^i, \quad P_k(z) = P_0(z) \{\xi(z)\}^{-k} + \\
 &\quad - \sum_{n=1}^k p_k^{(-n)} z^{-n},
 \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}
 (44) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_{ik}^{(n)}(1) z^n &= P_0(z) \{ \{ (z) \} \}^{i-k} + \\
 &\quad - \sum_{n=1}^k p_k^{(-n)} z^{-n} \{ \{ (z) \} \}^i = \\
 &= \begin{cases} \sum_{n=i-k}^{\infty} p_{k-i}^{(n)} z^n - \sum_{h=1}^k p_k^{(-h)} z^{-h} \sum_{m=i}^{\infty} \frac{1}{m} p_{-i}^{(m)} z^m & \text{als } i \geq 1, \\ \sum_{n=-k}^{\infty} p_k^{(n)} z^n - \sum_{n=1}^k p_k^{(-n)} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{(n)} z^n = P_k(z) & \text{als } i=0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

We vragen in het bijzonder naar

$$(45) \quad Q_{ik}^{(n)}(0) = p_{k-i}^{(n)} - \bar{Q}_{ik}^{(n)}(1),$$

zodat

$$(46) \quad Q_{ik}^{(n)}(0) = \begin{cases} \sum_{h=1}^k \frac{1}{n+h} p_k^{(-h)} p_{-i}^{(n+h)} & \text{als } i > 0 \text{ en } k > 0, \\ 0 & \text{als } ik = 0. \end{cases}$$

Het resultaat $Q_{ik}^{(n)}(0) = 0$ voor $i=0$ of $k=0$ of beide is triviaal.

II. Neem $\lambda=1$, $j \leq 0$, $l \leq 0$. Met $i=-1$ en $j=-k$ volgt uit (42) en (27)

$$\begin{aligned}
 (47) \quad Q_{jl}^{(n)}(0) &= p_{l-j}^{(n)} - \bar{Q}_{jl}^{(n)}(1) = p_{k-i}^{(n)} - \bar{Q}_{ik}^{(n)}(1) = \\
 &= Q_{ik}^{(n)}(0)
 \end{aligned}$$

Algemener geldt voor alle i en k , voor alle $n \geq 1$ en voor alle $\lambda \geq 0$

$$(48) \quad Q_{ik}^{(n)}(\lambda) = Q_{-k, -i}^{(n)}(\lambda).$$

Dit zien we zó: een "pad", dat in n "stappen" van i naar k voert, gaat in een pad met dezelfde kans van optreden over,

dat in n stappen van $-k$ naar $-i$ voert, door de sprongen van het eerste pad in omgekeerde volgorde uit te voeren.

Voorbeeld: als $i < j < l < k$, dan heeft het pad, dat in 3 stappen van i over j over l naar k voert kans

$p_{j-i} p_{l-j} p_{k-l}$. Het pad in 3 stappen van $-k$ over $-l$ over $-j$ naar $-i$ heeft kans $p_{k-l} p_{l-j} p_{j-i}$. Hieruit volgt de juistheid van (48).

III. Neem $\lambda=1$, $i \geq 0$, $k \leq 0$. Dan geldt

$$(49) \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ik}^{(n)}(1) z^n = \frac{P_{-i}(z) P_k(z)}{P_0(z)^2} = \{ \xi(z) \}^{i-k} =$$

$$= \sum_{n=i-k}^{\infty} \frac{i-k}{n} p_{k-i}^{(n)} z^n,$$

zodat

$$(50) \quad Q_{ik}^{(n)}(1) = \frac{i-k}{n} p_{k-i}^{(n)}.$$

Kemperman geeft nog enige speciale gevallen.

2. Keilson's benaderingswijze (eerste methode)

Literatuur: Keilson, Green's function methods for bounded processes, speciaal blz. 19-22, Univ. of Birmingham lecture notes 1963.

Het bestuderen van sommen

$$(51) \quad \underline{s}_n = \underline{s}_0 + \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n$$

voor $n=0, 1, 2, \dots$ is niets anders dan het analyseren van een stochastisch proces met "discrete tijdparameter". Een realisering van dit proces kan voor $t \geq 0$ door een trapfunctie $\underline{s}_0 + \sum_{k=1}^{\underline{n}(t)} \underline{x}_k \cdot \mathbf{1}_{[k, k+1)}(t-k)$ weergegeven worden. Alleen in de equidistante punten $1, 2, \dots$ van de "tijdas" verandert de trapfunctie van waarde. Een nauw verwant proces wordt verkregen, door de tijdstippen waarop de trapfunctie van waarde verandert, stochastisch te nemen, terwijl de oorspronkelijke beschrijving der sprongen gehandhaafd blijft.

Laat $\underline{n}(t)$ voor $t \geq 0$ een stationair Poissonproces zijn, zodat voor een positieve constante ν geldt

$$(52) \quad P\{\underline{n}(t) = n\} = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Beschouw voor $t \geq 0$ $\underline{n}(t)$

$$(53) \quad \underline{s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s}_0 + \sum_{k=1}^{\underline{n}(t)} \underline{x}_k,$$

waarbij $\underline{s}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ als eerder onafhankelijke stochastische variabelen zijn, die slechts gehele waarden aan-nemen, en de $\underline{x}_n$ alle dezelfde verdelingsfunctie bezitten met

$$(54) \quad p_j = P\{\underline{x}_n = j\}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j = 1.$$

Het Poissonproces is onafhankelijk van de $\underline{s}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$, zodat $\underline{s}(t)$ voor $t \geq 0$ een welgedefinieerd stochastisch proces is, met "continue tijdparameter".

Keilson heeft zich voornamelijk met $\underline{s}(t)$ beziggehouden, zonder zich veel om $\underline{s}_n$ te bekommeren. Bij het onderzoeken van een samengestelde functie $h(x)=f(g(x))$ kan het verstandig zijn, als we met vrij ingewikkelde f en g te doen hebben, h rechtstreeks te onderzoeken. Maar als de eigenschappen van f en g bekend zijn en bijvoorbeeld g vrijwel triviaal is, dan kan de studie van h beter gezien worden als de studie van f met een kleine complicatie. Op grond van wat Kemperman gedaan heeft, kunnen we dan ook tal van resultaten van Keilson afleiden en soms eenvoudiger formuleren. Om het contact tussen de verschillende benaderingswijzen duidelijk te laten uitkomen, geven we nu eerst enige door Keilson berekende grootheden, zoals die uit Kemperman's resultaten volgen.

Voer in voor alle gehele i en k en alle $t \geq 0$

$$(55) \quad c_{k-i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{s}(t)=k \mid \underline{s}(0)=i \} ,$$

dan geldt wegens (53)

$$(56) \quad c_{k-i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{k-i}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$$

en voldoet

$$(57) \quad c_{k-i}^*(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} c_{k-i}(t) dt \quad (\operatorname{Re} \tau > 0)$$

aan

$$(58) \quad c_{k-i}^*(\tau) = \frac{1}{\nu + \tau} \sum_{n=0}^{\infty} p_{k-i}^{(n)} \left(\frac{\nu}{\nu + \tau} \right)^n = \frac{1}{\nu + \tau} P_{k-i} \left(\frac{\nu}{\nu + \tau} \right).$$

Als eerder beperken we ons tot p_j 's, die voldoen aan

$$(59) \quad p_j = 0 \text{ voor } j < -1, p_{-1} \neq 0.$$

A. Neem $i < 0$. Voor $k < 0$ en $t \geq 0$ voeren we in

$$(60) \quad P_{ik}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{s}(t)=k \text{ en } \max_{0 \leq u \leq t} \underline{s}(u) < 0 \mid \underline{s}(0)=i\}.$$

Dan geldt

$$(61) \quad P_{ik}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ik}^{(n)}(0) e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$$

Met (48) en (46) volgt

$$(62) \quad P_{ik}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{-i} \frac{-k}{n+h} p_{-i}^{(-h)} p_k^{(n+h)} \right) e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}.$$

Laat $\underline{v}_i$ de tijd zijn, nodig om voor het eerst een niet-negatieve toestand te bereiken, als het proces op tijdstip 0 in toestand $i < 0$ begint, zodat

$$(63) \quad \{\underline{v}_i \leq v\} = \{\exists_t^{0 < t \leq v} \underline{s}(t) \geq 0 \mid \underline{s}(0)=i\}.$$

Dan geldt voor

$$(64) \quad \underline{V}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{v}_i \leq t\}$$

analoog aan (72)

$$(65) \quad \underline{V}_i'(t) = \nu \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} P_{ik}(t) p_{h-k}.$$

B. Neem $i > 0$. Voor $k > 0$ en $t \geq 0$ voeren we in

$$(66) \quad P_{ik}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{s}(t)=k \text{ en } \min_{0 \leq u \leq t} \underline{s}(u) > 0 \mid \underline{s}(0)=i\}.$$

Dan geldt (61) ook voor deze $P_{ik}(t)$ en volgt¹⁾ met (46)

$$(67) \quad P_{ik}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^k \frac{i}{n+h} p_h^{(-h)} p_{-i}^{(n+h)} \right) e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$$

¹⁾ In feite geldt $P_{ik}(t) = P_{-k, -i}(t)$, analoog aan (48).

Laat $\underline{u}_i$ de tijd zijn, nodig om voor het eerst een niet-positieve toestand te bereiken, als het proces op tijdstip 0 in toestand i begint, zodat

$$(68) \{ \underline{u}_i \leq u \} = \{ \exists_t \quad 0 \leq t \leq u \quad \underline{s}(t)=0 \mid \underline{s}(0)=i \}.$$

Dan geldt voor

$$(69) \quad U_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{u}_i \leq t \}$$

analoog aan (72) en met gebruik van (61)

$$(70) \quad U_i'(t) = \nu P_{i-1}(t) p_{-1} = \nu p_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{i-1}^{(n)}(0) e^{-\nu t} \left(\frac{\nu t}{n!} \right)^n.$$

Met (67) volgt

$$(71) \quad U_i'(t) = \nu p_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (p_{-1})^{-1} p_{-i}^{(n+1)} e^{-\nu t} \left(\frac{\nu t}{n!} \right)^n \\ = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} p_{-i}^{(n)} e^{-\nu t} \left(\frac{\nu t}{n!} \right)^n = \frac{1}{t} C_{-i}(t).$$

Keilson geeft voor geval A een met (62) vergelijkbaar antwoord en (65), voor geval B geeft hij (71). Echter ontbreekt in de gegeven afleidingen de "Keilson-filosofie". We keren daarom terug tot (53) voor een rechtstreekse studie van $\underline{s}(t)$ voor $t \geq 0$.

Voor $C_{k-i}(t) = P \{ \underline{s}(t)=k \mid \underline{s}(0)=i \}$ gelden à la Feller de relaties

$$(72) \quad C_{k-i}(t+dt) = (1 - \nu dt) C_{k-i}(t) + \nu dt \sum_{h=-\infty}^{k+1} C_{h-i}(t) p_{k-h} + o(dt),$$

zodat

$$(73) \quad \frac{d}{dt} C_{k-i}(t) = -\nu C_{k-i}(t) + \nu \sum_{h=-\infty}^{k+1} p_{k-h} C_{h-i}(t) \quad (i \text{ en } k \text{ geheel}).$$

Bij vaste i geeft (56) de enige rij functies $\{ C_{k-i}(t) \}$, die aan (73) voldoet met $C_{k-i}(0) = \delta_{ik}$ en die bestaat uit voor alle $t \geq 0$ differentieerbare, niet-negatieve, tot 1 sommerende functies. Dit kunnen we als volgt inzien:

Voer in voor $t \geq 0$ en $|w|=1$

$$(74) \quad C(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(t) w^k.$$

Dan voldoet

$$(75) \quad C^*(\tau, w) = \int_0^{\infty} e^{-\tau t} C(t, w) dt \quad (\operatorname{Re} \tau > 0)$$

volgens (73) aan

$$(76) \quad (\tau + \nu) C^*(\tau, w) - \nu \sum_{h=-\infty}^{\infty} w^k p_{k-h} C_h^*(\tau) = 1,$$

zodat volgt

$$(77) \quad C^*(\tau, w) = \frac{1}{\tau + \nu - \nu \psi(w)},$$

in overeenstemming met (56).

Als nu

$$(78) \quad q_i \stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{s}(0) = i \},$$

dan voldoet

$$(79) \quad D_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{s}(t) = k \} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_{k-i}(t) q_i$$

aan

$$(80) \quad \frac{d}{dt} D_k(t) = -\nu D_k(t) + \nu \sum_{h=-\infty}^{k+1} p_{k-h} D_h(t) \quad (k \text{ geheel}).$$

Met

$$(81) \quad D(t, w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k(t) w^k \quad (t \geq 0, |w| = 1)$$

en

$$(82) \quad D^*(\tau, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} D(t, w) dt \quad (\operatorname{Re} \tau > 0)$$

volgt analoog voor elke geschikte rij $\{D_k(t)\}$, die aan (80) voldoet met $D_k(0)=q_k$

$$(83) \quad D^*(\tau, w) = \frac{1}{\tau + \nu - \nu \psi(w)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k w^k.$$

De door (79) gegeven $D_k(t)$'s, lineaire combinaties der $C_j(t)$'s, vormen dus de enige oplossing van (80) met voor ons interessante functies (niet negatief, differentieerbaar, enz.), want (79) is equivalent met (83).

A. Neem $i < 0$. Beschouw voor $k < 0$ en $t \geq 0$

$$(84) \quad P_{ik}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{s}(t)=k \text{ en } \max_{0 \leq u \leq t} \underline{s}(u) < 0 \mid \underline{s}(0)=i \}.$$

Nu geldt

$$(85) \quad P_{ik}(t+dt) = (1-\nu dt)P_{ik}(t) + \begin{cases} \nu dt \sum_{h=-\infty}^{k+1} P_{ih}(t)p_{k-h} + o(dt) & (k < -1), \\ \nu dt \sum_{h=-\infty}^k P_{ih}(t)p_{k-h} + o(dt) & (k = -1), \end{cases}$$

zodat

$$(86) \quad \frac{d}{dt} P_{ik}(t) = -\nu P_{ik}(t) + \nu \sum_{h=-\infty}^{k+1} p_{k-h} P_{ih}(t) + \\ -\nu \delta_{k+1,0} p_{-1} P_{i0}(t) \quad (k < 0).$$

Hoewel $P_{i0}(t)$ in (86) niet werkelijk optreedt, blijkt uit (84) dat $P_{i0}(t)=0$ moet gelden. Voor vaste i geeft (86) met de extra conditie

$$(87) \quad P_{i0}(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

een deel van het stelsel (80).

Het is niet uitgesloten, dat de door ons voor vaste $i < 0$ en willekeurige $k < 0$ gezochte $P_{ik}(t)$ aangevuld kunnen worden tot een voor alle gehele k gedefiniëerde rij functies $\{P_{ik}(t)\}$, die aan (80) voldoet en waarvoor (87) geldt. Sterker nog: een oplossing van (86), die aan (87) voldoet en uit functies met de gewenste eigenschappen bestaat, kan gebruikt worden om een oplossing van (80) te construeren met eigenschap (87). Wellicht kan de door ons gezochte rij functies ook als rij van lineaire combinaties der $C_j(t)$ geschreven worden. Hoe kunnen we dit nagaan? Er blijken tal van bruikbare identiteiten te bestaan, die we eerst afleiden.

Uit definitie (74) volgt voor $0 < |w| \leq 1$ en $t \geq 0$

$$(88) \quad C(t, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k^{(n)} w^k e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu t} \frac{\{\nu t \psi(w)\}^n}{n!} = \exp(\nu t \{\psi(w) - 1\}).$$

Dan geldt met voor $0 < |w| < 1$ convergerende reeksen

$$(89) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k C_k(t) w^{k-1} = \frac{\partial C(t, w)}{\partial w} = \nu t \psi'(w) C(t, w) =$$

$$= \nu t \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j w^{j-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} C_h(t) w^h =$$

$$= \nu t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (k-h) p_{k-h} C_h(t) w^{k-1}$$

of

$$(90) \quad k C_k(t) = \nu t \sum_{h=-\infty}^{\infty} (k-h) p_{k-h} C_h(t) \quad (k \text{ geheel}).$$

Verder geldt voor elk natuurlijk getal m met voor $0 < |w| < 1$ convergerende reeksen

$$\begin{aligned}
 (91) \quad & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} h p_{k-h}^{(m)} C_h(t) w^{k-1} = \\
 & = \sum_{h=-\infty}^{\infty} h C_h(t) w^{h-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j^{(m)} w^j = \{ \psi(w) \}^m \frac{\partial C(t, w)}{\partial w} = \\
 & = \nu t \{ \psi(w) \}^m \psi'(w) C(t, w) = \frac{\nu t}{m+1} \left(-\frac{d}{dw} \{ \psi(w) \} \right)^{m+1} C(t, w) = \\
 & = \frac{\nu t}{m+1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(m+1)} w^{j-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} C_h(t) w^h = \\
 & = \frac{\nu t}{m+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (k-h) p_{k-h}^{(m+1)} C_h(t) w^{k-1}
 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
 (92) \quad & \sum_{h=-\infty}^{\infty} h p_{k-h}^{(m)} C_h(t) = \frac{\nu t}{m+1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (k-h) p_{k-h}^{(m+1)} C_h(t) \\
 & \quad (k \text{ geheel}).
 \end{aligned}$$

Uit (90) volgt met $k=0$

$$(93) \quad 0 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} h p_h C_{-h}(t),$$

zodat met

$$(94) \quad P_{-1,k}(t) = - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{h p_h}{p_{-1}} C_{k-h}(t) = - \frac{k C_k(t)}{t p_{-1}} \quad (k \text{ geheel})$$

een oplossing van (86) is gevonden, die aan (87) voldoet en waarvoor

$$(95) \quad P_{-1,k}(0) = -\frac{kp_k}{p_{-1}} = \delta_{-1,k} \quad (k < 0)$$

geldt. Is dit nu de gezochte rij functies?

Om te controleren of $P_{-1k}(t)$ voor $k \leq 0$ en $t \geq 0$ aan het stelsel (86) voldoet, behoeven we slechts na te gaan, of dit met $\frac{k C_k(t)}{t}$ het geval is. Dit blijkt zo te zijn (gebruik 73)).

Is $P_{-1k}(t)$ nu de gezochte kans? Dit kunnen we nagaan, door te onderzoeken of het gevonden resultaat overeenstemt met de in (62) gegeven uitkomst. Dat is inderdaad het geval (gebruik (48) en (46)).

Het is onbevredigend voor de controle van Keilson's uitkomsten die van Kemperman te moeten aanvullen. Dit is echter altijd nog beter dan dat géén controle mogelijk is. We zien verder van deze controle af.

Keilson vindt $P_{ik}(t)$ voor $i \leq -2$ door alle speciale gevallen van (90) en (92) met $k=0$ en $m \leq -i-1$ te combineren. Dit geeft $-i$ lineaire vergelijkingen voor de $-i$ "onbekenden" $C_1(t), C_2(t), \dots, C_{-i}(t)$ als alle $C_{-1}(t), C_{-2}(t), \dots$ als "bekenden" worden opgevat en wel

$$(96) \quad \sum_{h=-\infty}^0 h p_{-h}^{(m)} C_h(t) = 0 \quad (0 \leq m \leq -i-1)$$

of

$$(97) \quad \begin{cases} p_{-1} C_1(t) = p_1 C_{-1}(t) + 2p_2 C_{-2}(t) + \dots \\ 2p_{-2}^{(2)} C_2(t) + p_{-1}^{(2)} C_1(t) = p_1^{(2)} C_{-1}(t) + 2p_2^{(2)} C_{-2}(t) + \dots \\ \dots \\ (-i)p_i^{(-i)} C_i(t) + \dots + p_{-1}^{(-i)} C_1(t) = p_1^{(-i)} C_{-1}(t) + 2p_2^{(-i)} C_{-2}(t) + \dots \end{cases}$$

Daar $p_i^{(-i)} = (p_{-1})^{-i} \neq 0$ is, kan $C_{-i}(t)$ in $C_{-1}(t), C_{-2}(t), \dots$ uitgedrukt worden.

De relaties

$$(98) \quad c_{-i}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_{-j}(t) \quad (i < 0)$$

hebben we juist nodig, want voor vaste $i < 0$ voert de keus

$$(99) \quad P_{ik}(t) = c_{k-i}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_{k-j}(t) \quad (k \text{ geheel})$$

tot een rij functies, die aan (80) en (87) voldoet met $P_{i0}(t) = 0$ voor $t \geq 0$ en

$$P_{ik}(0) = \delta_{k-i} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \delta_{k-j} = \delta_{k-i} \quad \text{voor } k < 0. \text{ We hebben reeds gevonden}$$

$$(100) \quad \alpha_{-1,j} = \frac{j p_j}{p_{-1}} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Wegens (58) volgt uit (98)

$$(101) \quad \frac{\nu}{\nu+\tau} P_{-i} \left(\frac{\nu}{\nu+\tau} \right) = \frac{\nu}{\nu+\tau} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} P_{-j} \left(\frac{\nu}{\nu+\tau} \right) \quad (i < 0)$$

of

$$(102) \quad P_{-i}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} P_{-j}(z) \quad (i < 0 \text{ en } |z| < 1).$$

Met Kemperman's benaderingswijze, speciaal lemma 2 (zie (23)), volgt

$$(103) \quad \sum_{h=1}^{-i} p_{-i}^{(-h)} z^{-h} + \frac{1}{z \psi'(\xi) \xi^{-i+1}} = \frac{1}{z \psi'(\xi)} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi^{j-1}$$

of

$$(104) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi^{j-1} = \frac{1}{\xi^{-i+1}} + \sum_{h=1}^{-i} p_{-i}^{(-h)} z^{-h+1} \psi'(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\xi^{-i+1}} + \sum_{h=1}^{-i} p_{-i}^{(-h)} \{ \psi(\xi) \}^{h-1} \psi'(\xi).$$

Nu is wegens (4)

$$(105) \quad \sum_{h=1}^{-i} \frac{1}{h} p_{-i}^{(-h)} \frac{d}{d\xi} \{\psi(\xi)\}^h = \sum_{h=1}^{-i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} p_{-i}^{(-h)} j p_j^{(h)} \xi^{j-1}$$

zodat

$$(106) \quad \alpha_{ij} = j \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} \quad (i < 0 \text{ en } j > 0).$$

Met $i = -1$ vinden we (100) terug. Tevens hebben we aangetoond

$$(107) \quad j \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} = \begin{cases} -1 & \text{als } j=i, i < 0 \\ 0 & \text{als } i, j < 0, j \neq i. \end{cases}$$

Het rechterlid in (104) bezit volgens de gegeven afleiding een machtreeksontwikkeling naar ξ . Gebruikmakend van de definitie van $\Delta_k(z)$ in (20) kan men bewijzen

$$(108) \quad \frac{1}{\xi^{-i+1}} + \sum_{h=1}^{-i} p_{-i}^{(-h)} \{\psi(\xi)\}^{h-1} \psi'(\xi) =$$

$$w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{\psi'(\xi)}{w^{-i+1} \{\psi(\xi) - \psi(w)\}} dw \quad (i < 0),$$

het rechterlid geeft een machtreeks in ξ bij reeksontwikkeling der integrand naar machten van $\psi(w)$ en term voor term integratie (en bevestigt het voorgaande: in het bijzonder is blijkbaar de overgang van (98) naar (101) verantwoord).

Het is mogelijk, de identiteiten in (96) te vervangen door equivalente relaties voor het oorspronkelijke proces met discrete tijdparameter. Een analoge

bewijsmethode levert

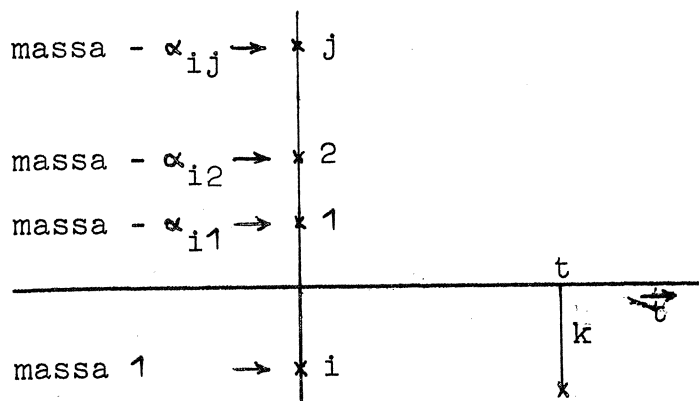
$$(109) \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} h p_{-h}^{(m)} p_h^{(n)} = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ook volgt (109) uit (96) door na vermenigvuldiging met $e^{\nu t}$ de coefficient van $\frac{(\nu t)^n}{n!}$ in linker- en rechterlid te bepalen.

Gevonden is nu (vergelijk met (62))

$$(110) \quad P_{ik}(t) = C_{k-i}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{-i} \frac{j p_{-i}^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} C_{k-j}(t) \\ (i < 0, k \leq 0)$$

Het blijkt dus mogelijk de $P_{ik}(t)$ als lineaire combinatie der $C_j(t)$ te schrijven en wel van $C_{k-i}(t), C_{k-1}(t), C_{k-2}(t), \dots$ met alleen van i (de uitgangstoestand) afhankelijke coëfficiënten.



De kansen $P_{ik}(t)$ (met vaste $i < 0$, willekeurige $k \leq 0$) worden dus gegenereerd door op $t = 0$ met massa 1 vanuit i , met massa $-\alpha_{ij}$ vanuit $j = 1, 2, \dots$ het "onbeperkte" proces met overgangswah $C_{k-i}(t) = P\{\underline{S}(t) = k | \underline{S}(0) = i\}$ te laten starten en op tijdstip t voor de verschillende toestanden met $k = 0$ het effect van al deze processen op te tellen.

In (94) zagen we, dat $P_{-1k}(t)$ in $C_k(t)$ kan worden uitgedrukt. Analoo maar moeilijker kunnen we algemenere relaties vinden. Zo geldt

$$(111) \quad \begin{cases} \frac{-P_{-1k}(t)}{k} = p_1^{(-1)} \frac{C_k(t)}{\nu t}, \\ \frac{-P_{-2k}(t)}{k} = (p_2^{(-1)} + p_2^{(-2)}) \frac{C_k(t)}{\nu t} + p_2^{(-2)} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt}\right) \frac{C_k(t)}{\nu t}, \\ \frac{-P_{-3k}(t)}{k} = (p_3^{(-1)} + p_3^{(-2)} + p_3^{(-3)}) \frac{C_k(t)}{\nu t} + \\ + (p_3^{(-2)} + 2p_3^{(-3)}) \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt}\right) \frac{C_k(t)}{\nu t} + p_3^{(-3)} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt}\right)^2 \frac{C_k(t)}{\nu t}. \end{cases}$$

Het vermoeden ligt nu voor de hand, dat $P_{ik}(t)$ alleen in $C_k(t)$ kan worden uitgedrukt. Dit blijkt juist te zijn, zoals uit de volgende afleiding blijkt. Er geldt voor $0 < |w| < 1$, elke $t \geq 0$ en $h \geq 1$

$$\begin{aligned} (112) \quad e^{\nu t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(h)} C_{k-j}(t) w^{k-1} &= \\ &= e^{\nu t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(h)} w^{j-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i(t) w^i = \\ &= e^{\nu t \psi(w)} \frac{d}{dw} \{ \psi(w) \}^h = \frac{d}{dw} e^{\nu t \psi(w)} \{ \psi(w) \}^h + \\ &\quad - \nu t \psi'(w) \{ \psi(w) \}^h e^{\nu t \psi(w)} = \\ &= \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t \psi(w)} - \nu t \psi'(w) \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t \psi(w)} = \\ &= \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{d}{dw} e^{\nu t \psi(w)} - t \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{d}{dw} \frac{e^{\nu t \psi(w)}}{t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k w^{k-1} \left(\left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t} C_k(t) - t \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{e^{\nu t} C_k(t)}{t} \right), \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}
 (113) \quad & \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(h)} c_{k-j}(t) = k e^{-\nu t} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t} c_k(t) + \\
 & - t \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{e^{\nu t} c_k(t)}{t} = \\
 & = \frac{k e^{-\nu t}}{\nu^h} \left(\sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \left(\frac{d}{dt} \right)^{h-j} t e^{\nu t} \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{t} \right) + \\
 & - t \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{h-j} e^{\nu t} \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{t} \right) = \\
 & = \frac{k}{\nu^h} \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \left(t \nu^{h-j} + (h-j) \nu^{h-j-1} - t \nu^{h-j} \right) \left(\frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{t} = \\
 & = -k h \sum_{j=0}^{h-1} \binom{h-1}{j} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{\nu t}.
 \end{aligned}$$

Nu geldt verder wegens (107)

$$(114) \quad \sum_{h=1}^{-i} \sum_{j=-h}^{-1} \frac{j p_{-i}^{(-h)} p_j^{(h)} c_{k-j}(t)}{h} = -c_{k-i}(t),$$

zodat voor $i \leq 0$, $k \leq 0$ en alle $t \geq 0$ volgt

$$\begin{aligned}
 (115) \quad P_{ik}(t) &= - \sum_{h=1}^{-i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{j p_{-i}^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} c_{k-j}(t) = \\
 &= -k \sum_{h=1}^{-i} \sum_{j=0}^{h-1} \binom{h-1}{j} p_{-i}^{(-h)} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{\nu t} = \\
 &= -k \sum_{j=0}^{-i-1} \sum_{h=j+1}^{-i} \binom{h-1}{j} p_{-i}^{(-h)} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^j \frac{c_k(t)}{\nu t}.
 \end{aligned}$$

Uit dit resultaat kan (62) teruggevonden worden.

Met (110), (113) en (114) volgt, door invullen van (56)

$$\begin{aligned}
 (116) \quad P_{ik}(t) &= - \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(h)} c_{k-j}(t) = \\
 &= -k \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} e^{-\nu t} \left(\left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t} c_k(t) + \right. \\
 &\quad \left. - t \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{e^{\nu t} c_k(t)}{t} \right) = \\
 &= -k \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} e^{-\nu t} \sum_{n=h}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-h}}{(n-h)!} p_k^{(n)} \left\{ 1 - \frac{n-h}{n} \right\} = \\
 &= -k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)} p_k^{(m+h)}}{m+h} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^m}{m!}.
 \end{aligned}$$

De gevonden relaties voor $P_{ik}(t)$ blijken dus alle juist te zijn.

Keilson geeft verder $V_1'(t)$ als in (65).

B. Neem $i > 0$. Beschouw voor $k > 0$ en $t \gg 0$

$$(117) \quad P_{ik}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\left\{ \underline{s}(t) = k \text{ en } \min_{0 \leq u \leq t} \underline{s}(u) \geq i \mid \underline{s}(0) = i \right\}.$$

Deze kans wordt door Keilson niet berekend bij deze methode. Hij beschouwt slechts problemen, die tot een stelsel (80) met extra conditie zijn terug te brengen, terwijl deze $P_{ik}(t)$ voldoen aan

$$(118) \quad \frac{d}{dt} P_{ik}(t) = -\nu P_{ik}(t) + \nu \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} P_{ih}(t) \quad (k > 0).$$

voor elke vaste $i > 0$ met

$$(119) \quad P_{ik}(0) = \delta_{ik} \quad (k > 0).$$

Uit Kemperman's relatie (48) volgt echter met (61)

$$(120) \quad P_{ik}(t) = P_{-k, -i}(t),$$

zodat door ons thans bewezen is (zie (110))

$$(121) \quad P_{ik}(t) = C_{k-i}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^k \frac{j p_k^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} C_{-i-j}(t) \\ (i > 0, k > 0).$$

Hier wordt $P_{i0}(t)$ niet door (121) gegeven, want $C_{-1}(t) \neq 0$.
Tevens is de "spiegelpunten"relatie uit de figuur op blz. 22 verloren gegaan. Ook geldt op grond van (120) en (115)

$$(122) \quad P_{ik}(t) = i \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{h=j+1}^k \binom{h-1}{j} p_k^{(-h)} \left(\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \right)^j \frac{C_{-i}(t)}{v t} \\ (i > 0, k > 0).$$

Keilson geeft in dit geval alleen de kansdichtheid $U_i'(t)$ van $\underline{u}_i$, de tijd, nodig om vanuit toestand $i \geq 0$ op tijdstip 0 voor het eerst toestand 0 te bereiken. Hij gaat daarbij als volgt te werk. Voor $i > 0$ geldt

$$(123) \quad U_i(t+dt) = U_i(dt) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(dt) U_k(t) + o(dt),$$

zodat

$$(124) \quad U_i'(t) = U_i'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}'(0) U_k(t)$$

met (volgens (118))

$$(125) \quad P_{ik}'(0) = -v P_{ik}(0) + v \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} P_{ih}(0) = \\ = -v \delta_{ik} + v \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} \delta_{ih}.$$

Tevens geldt

$$(126) \quad U_i(dt) = v dt p_{-1} \delta_{i1} \text{ en } U_i(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (116) \quad P_{ik}(t) &= - \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j p_j^{(h)} c_{k-j}(t) = \\
 &= -k \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} e^{-\nu t} \left(\left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h e^{\nu t} c_k(t) + \right. \\
 &\quad \left. - t \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} \right)^h \frac{e^{\nu t} c_k(t)}{t} \right) = \\
 &= -k \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)}}{h} e^{-\nu t} \sum_{n=h}^{\infty} \frac{(\nu t)^{n-h}}{(n-h)!} p_k^{(n)} \left\{ 1 - \frac{n-h}{n} \right\} = \\
 &= -k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{-i} \frac{p_{-i}^{(-h)} p_k^{(m+h)}}{m+h} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^m}{m!}.
 \end{aligned}$$

De gevonden relaties voor $P_{ik}(t)$ blijken dus alle juist te zijn.

Keilson geeft verder $V_i'(t)$ als in (65).

B. Neem $i > 0$. Beschouw voor $k > 0$ en $t \gg 0$

$$(117) \quad P_{ik}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\left\{ \underline{s}(t) = k \text{ en } \min_{0 \leq u \leq t} \underline{s}(u) \geq i \mid \underline{s}(0) = i \right\}.$$

Deze kans wordt door Keilson niet berekend bij deze methode. Hij beschouwt slechts problemen, die tot een stelsel (80) met extra conditie zijn terug te brengen, terwijl deze $P_{ik}(t)$ voldoen aan

$$(118) \quad \frac{d}{dt} P_{ik}(t) = -\nu P_{ik}(t) + \nu \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} P_{ih}(t) \quad (k > 0).$$

voor elke vaste $i > 0$ met

$$(119) \quad P_{ik}(0) = \delta_{ik} \quad (k > 0).$$

Uit Kemperman's relatie (48) volgt echter met (61)

$$(120) \quad P_{ik}(t) = P_{-k, -i}(t),$$

zodat door ons thans bewezen is (zie (110))

$$(121) \quad P_{ik}(t) = C_{k-i}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^k \frac{j p_k^{(-h)} p_j^{(h)}}{h} C_{-i-j}(t) \\ (i > 0, k > 0).$$

Hier wordt $P_{i0}(t)$ niet door (121) gegeven, want $C_{-i}(t) \neq 0$.
Tevens is de "spiegelpunten"relatie uit de figuur op blz. 22 verloren gegaan. Ook geldt op grond van (120) en (115)

$$(122) \quad P_{ik}(t) = i \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{h=j+1}^k \binom{h-1}{j} p_k^{(-h)} \left(\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \right)^j \frac{C_{-i}(t)}{v^t} \\ (i > 0, k > 0).$$

Keilson geeft in dit geval alleen de kansdichtheid $U_i'(t)$ van $\underline{u}_i$, de tijd, nodig om vanuit toestand $i > 0$ op tijdstip 0 voor het eerst toestand 0 te bereiken. Hij gaat daarbij als volgt te werk. Voor $i > 0$ geldt

$$(123) \quad U_i(t+dt) = U_i(dt) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(dt) U_k(t) + o(dt),$$

zodat

$$(124) \quad U_i'(t) = U_i'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}'(0) U_k(t)$$

met (volgens (118))

$$(125) \quad P_{ik}'(0) = -v P_{ik}(0) + v \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} P_{ih}(0) = \\ = -v \delta_{ik} + v \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} \delta_{ih}.$$

Tevens geldt

$$(126) \quad U_i(dt) = v dt p_{-1} \delta_{i-1} \text{ en } U_i(0) = 0,$$

zodat

$$(127) \quad U'_i(0) = \nu p_{-1} \delta_{i1}.$$

Dan is

$$(128) \quad U'_i(t) = \nu p_{-1} \delta_{i1} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{ik} U_k(t) + \nu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{k+1} p_{k-h} \delta_{ih} U_k(t) = \\ = \nu p_{-1} \delta_{i1} - \nu U_i(t) + \nu \sum_{k=i-1}^{\infty} p_{k-i} U_k(t) - \nu \delta_{i-1,0} p_{-1} U_0(t),$$

zodat

$$(129) \quad U''_i(t) = -\nu U'_i(t) + \nu \sum_{k=i-1}^{\infty} p_{k-i} U'_k(t) - \nu \delta_{i-1,0} p_{-1} U'_0(t).$$

Verwissel i en k en vervang k door $-k$. Dan geldt voor $k < 0$

$$(130) \quad U''_{-k}(t) = -\nu U'_{-k}(t) + \nu \sum_{i=-k-1}^{\infty} p_{i+k} U'_i(t) - \nu \delta_{k+1,0} p_{-1} U'_0(t) = \\ = -\nu U'_{-k}(t) + \nu \sum_{h=-\infty}^{k+1} p_{k-h} U'_{-h}(t) - \nu \delta_{k+1,0} p_{-1} U'_0(t).$$

Uit de definitie van $\underline{u}_i$ volgt $P\{\underline{u}_0 = 0\} = 1$. Dus is

$$(131) \quad U'_0(t) = 0 \text{ voor alle } t \geq 0,$$

als in $t = 0$ de rechter-afgeleide wordt beschouwd zoals ook in (124) is gedaan. Blijkens (130) en (131) voldoet

$$(132) \quad \underline{\overline{P}}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} U'_{-k}(t)$$

aan dezelfde vergelijkingen (86) en (87) als $P_{ik}(t)$. Daarom geldt voor alle t

$$(133) \quad \underline{\overline{P}}_k(t) = \nu p_{-1} P_{-1,k}(t) \quad (k \leq 0),$$

daar dit juist is voor $t = 0$ volgens (127). Met (94) volgt

$$(134) \quad U'_{-k}(t) = -\nu \sum_{h=-\infty}^{\infty} h p_h C_{k-h}(t) = -\frac{k}{t} C_k(t) \quad (k \leq 0).$$

In de relatie

$$(135) \quad \nu t p_{-1} P_{-1,k}(t) = -k C_k(t)$$

kan men (61) in het linkerlid en (56) in het rechterlid substitueren. Gelijkstellen van de coëfficiënten van $(\nu t)^n$ leidt tot een versie van (46) met $k = 1$, $i = -k$, zie ook (48). Tenslotte wordt nog afgeleid:

$$(136) \quad P_{ik}(t) = C_{k-i}(t) - i \int_0^t C_k(t-u) \frac{C_{-i}(u)}{u} du \quad (i, k > 0).$$

Wanneer een proces met discrete stappen langs de t -as zich van toestand i naar toestand k beweegt, wordt daarbij óf de as nooit bereikt óf het proces gaat zonder de as te raken in h stappen naar toestand 1 , vandaar één stap omlaag en in $n-h-1$ stappen van 0 naar k :

$$(137) \quad P_{k-i}^{(n)} = Q_{ik}^{(n)}(0) + \sum_{h=0}^{n-1} Q_{i1}^{(h)}(0) p_{-1} p_k^{(n-h-1)}.$$

Onder substitutie van

$$(138) \quad \frac{(\nu t)^n}{n!} = \frac{(\nu t)^n}{h!(n-h-1)!} \int_0^1 y^h (1-y)^{n-h-1} dy = \\ = \nu \int_0^t \frac{(\nu u)^h}{h!} \frac{[\nu(t-u)]^{n-h-1}}{(n-h-1)!} du$$

wordt (137) met $e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}$ vermenigvuldigd en over n gesommeerd, waardoor met (56) en (61) volgt

$$(139) \quad C_{k-i}(t) = P_{ik}(t) + \int_0^t P_{i1}(u) \nu p_{-1} C_k(t-u) du.$$

Door toepassen van (48) en (135) op de integrand ontstaat (136). Men kan dit resultaat interpreteren als een compensatie op de horizontale as. Dit wordt verder toegelicht in paragraaf 5.

3. Numerieke beschouwingen.

We geven nu een paar voorbeelden van Keilson's compensatiestechniek. Nog steeds beschouwen we sommen

$$(140) \quad \underline{s}_n = \underline{s}_0 + \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

met onderling onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{s}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$, waarbij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ allen dezelfde verdeling bezitten. In deze paragraaf beperken we ons tot het speciale geval

$$(141) \quad \begin{aligned} P \{ \underline{s}_0 = i \} &= 1 \\ p_j &\stackrel{\text{def}}{=} P \{ \underline{x}_n = j \} = \begin{cases} p & \text{als } j = r_2 \\ q & \text{als } j = -r_1, \end{cases} \end{aligned}$$

waarbij r_1 en r_2 natuurlijke getallen zijn en $p+q=1$ is. Voor i nemen we een vast geheel getal.

Geval I. Neem

$$(142) \quad r_1 = r_2 = 1 \quad \text{en} \quad i < 0.$$

Er geldt

$$(143) \quad P \{ \underline{s}_n = i - n + 2j \} = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \quad (0 \leq j \leq n).$$

Als eerder vragen we naar

$$(144) \quad P \{ \underline{s}_1 < 0, \underline{s}_2 < 0, \dots, \underline{s}_{n-1} < 0, \underline{s}_n \geq 0 \mid \underline{s}_0 = i \}.$$

Iets algemener berekenen we voor elke $j \leq 0$

$$(145) \quad P\{\underline{s}_1 < 0, \underline{s}_2 < 0, \dots, \underline{s}_{n-1} < 0, \underline{s}_n = j \mid \underline{s}_0 = i\} = \\ = c_n(i, j) p^\alpha q^\beta.$$

Het is eenvoudig in te zien, dat $c_n(i, j)$ niet van p of q afhangt: $c_n(i, j)$ is het aantal verschillende paden $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, dat aan de gestelde conditie voldoet. Er geldt

$$(146) \quad c_n(i, j) = 0 \quad \begin{cases} \text{als } |i-j| \text{ en } n \text{ niet dezelfde pariteit hebben,} \\ \text{als } |i-j| > n. \end{cases}$$

In de overblijvende gevallen heeft elk pad dezelfde kans $p^\alpha q^\beta$, waarbij α het aantal positieve getallen onder $x_1, x_2, \dots, x_n$ is en β het aantal negatieve. Dus

$$(147) \quad \alpha = \frac{j-i+n}{2}, \quad \beta = \frac{-j+i+n}{2}.$$

Nu is $c_n(i, j)$ nog onbekend voor $|i-j| \leq n$, in die gevallen waarin $|i-j|$ en n dezelfde pariteit bezitten. We beperken ons tot die $c_n(i, j)$. Er is alleen een probleem als $i+n > 0$. Voor $i=-3$ vinden we in fig. 1 voor $c_n(i, j)$ de waarden onder de horizontale n -as geschreven bij de juiste n en j . Zo is $c_5(-3, -4) = 10$. De getallen $c_n(i, j)$ voldoen aan

$$(148) \quad c_{n+1}(i, j) = c_n(i, j-1) + c_n(i, j+1),$$

als we bepalen

$$(149) \quad c_n(i, 0) = 0.$$

Er geldt dus juist de optelregel van de driehoek van Pascal, behoudens op de n -as.

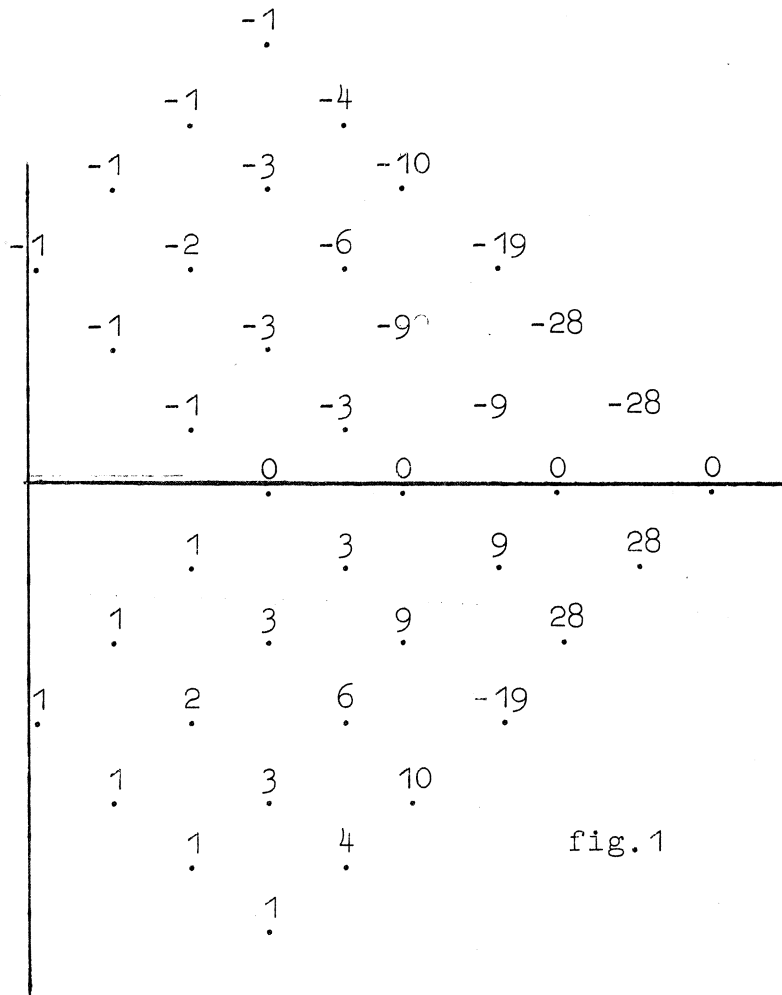


fig. 1

De optelregel geldt zonder beperking, als we in -1 op de verticale as -1 plaatsen en behalve in i en $-i$ in alle punten op die as met gehele coördinaat de waarde 0 gezet denken. Er is dus sprake van een spiegelingsprincipe, met behulp waarvan de $c_n(i, j)$ gemakkelijk berekend kunnen worden:

$$(150) \quad c_n(i, i-n+2j) = \binom{n}{j} - \binom{n}{j+1} \text{ voor } i < 0 \text{ en } 0 \leq j \leq n.$$

We nemen hierbij

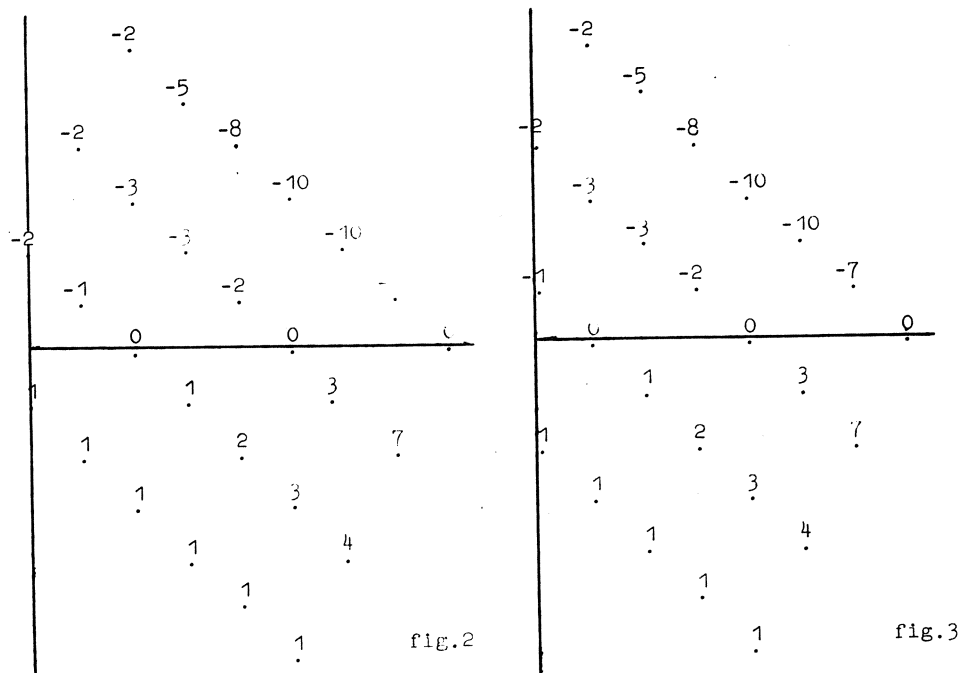
$$(151) \quad \binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{voor } n \text{ geheel } \geq 0 \text{ en } k \text{ geheel } < 0.$$

Wat komt er van dit spiegelingsprincipe terecht in algemener gevallen?

Geval II. Neem

(152) $r_1 = 1, r_2 = 2$ en $i < 0$.

Voor $i = -1$ vinden we fig.2, voor $i = -2$ fig.3.



Als eerder geven de getallen beneden de horizontale as het aantal verschillende paden aan, die vanuit i tot het aangegeven punt voeren en beneden de horizontale as blijven. In fig.2 is de optelregel van kracht, als we in 2 op de verticale as -2 plaatsen. Dit dienen we te controleren: vanuit toestand -1 kan toestand 0 alleen bereikt worden in $3n+2$ stappen ($n=0,1,\dots$). Elk van de $\binom{3n+2}{j}$ paden die j keer in positieve richting leiden voeren vanuit -1 naar $-1+2j-(3n+2-j) = 3j-3n-3$. Er zijn dus $\binom{3n+2}{n+1}$ paden vanuit -1 in $3n+2$ stappen naar 0 . Het aantal soortgelijke paden vanuit $+2$ is $\binom{3n+2}{n}$. Op de as ontstaat dus alleen massa nul als

$$(153) \quad \binom{3n+2}{n+1} = 2 \binom{3n+2}{n}.$$

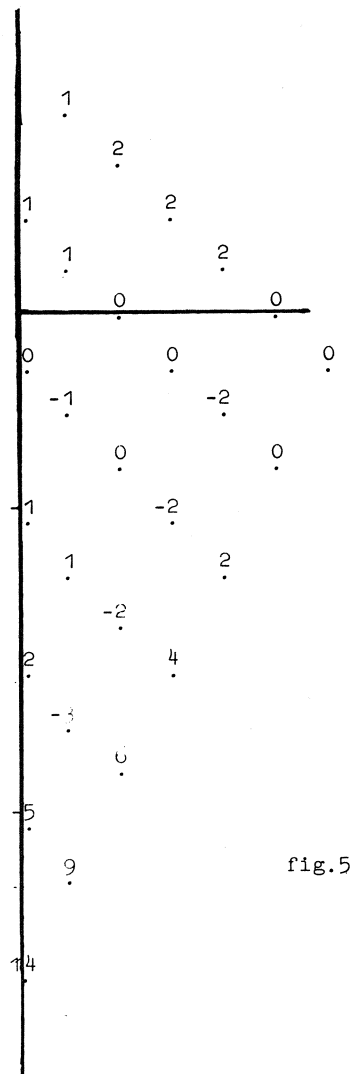
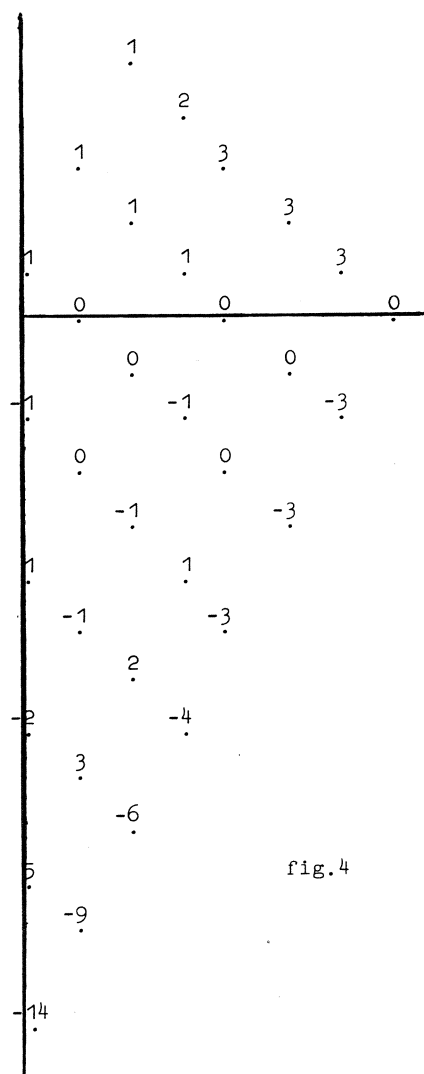
Dit is inderdaad het geval.

In fig. 3 is de optelregel van kracht als we in 1 op de verticale as -1 en in 4 op die as -2 plaatsen. Nu moeten we bewijzen, dat

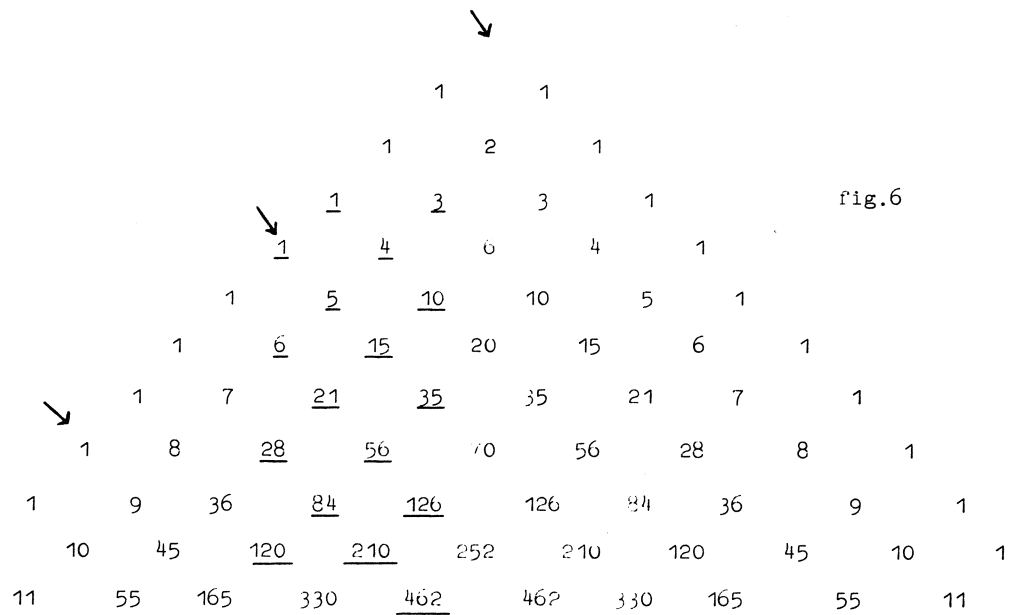
$$(154) \quad \binom{3n+1}{n+1} = \binom{3n+1}{n} + 2 \binom{3n+1}{n-1}.$$

Dit is juist. Merk op, dat fig.3 ontstaat uit fig.2, door in deze laatste figuur de verticale as over een afstand 1 naar rechts te verplaatsen. Doen we dit in fig.3, dan ontstaat de bij $i = -3$ passende figuur. Voor $i = -4$ krijgen we de figuur, door in fig.3 de verticale as over een afstand 2 naar rechts te verplaatsen en van het resultaat fig.2 getal voor getal af te trekken. Op deze wijze blijkt alleen compensatie op de verticale as nodig in de punten $i+3, i+6, \dots, -2i$ die boven de horizontale as liggen, als we in $i < 0$ op de verticale as beginnen. De juiste numerieke waarde kan langs deze weg eveneens gevonden worden. We merken nog op, dat de compenserende getallen op de verticale as allen negatief zijn.

Steeds met $r_1 = 1$ en $r_2 = 2$ kunnen we vragen naar het aantal paden van $i > 0$ naar $i-n+2j > 0$, die boven de horizontale as blijven. Voor $i = 1$ resp. 2 geven fig.4 resp.5 het antwoord. Alleen de getallen boven de as bezitten de genoemde interpretatie. De getallen onder de as komen tevoorschijn bij systematische compensatie. We merken op, dat de compenserende getallen op de verticale as nu alternerend van teken zijn en de figuren niet door verschuiving in elkaar overgaan. De figuur voor $i = 4$ ontstaat, door in fig.5 de verticale as over een afstand 1 naar rechts te verplaatsen en de getallen van fig.4 van de overeenkomstige in de gewijzigde fig.5 af te trekken. Voor algemene $i > 0$ kunnen we de bijbehorende figuur door optellen en aftrekken van delen van fig.4 en fig.5 verkrijgen. De getallen 1,2,5,14,... die in beide figuren



(afgezien van het teken langs de verticale as) voorkomen, zijn evenals de getallen 1,3,9,... ernaast terug te vinden met de driehoek van Pascal door het nemen van de verschillen der op één horizontaal onderstreepte getallen in fig.6.



Hadden we deze rijen door berekening kunnen vinden? Schrijf $b_0, b_1, b_2, \dots$ voor de rij $-1, 1, -2, 5, -14, 42, -132, 429, \dots$ van compenserende getallen op de verticale as in fig.4. Schrijf $a_0, a_1, a_2, \dots$ voor de rij $1, 1, 3, 12, 55, \dots$ op hoogte 1 boven de horizontale as in fig.4. Uit de theorie weten we, dat deze getallen op hoogte -1 in fig.2 voorkomen. Er geldt dus

$$(155) \quad a_n = \binom{3n}{n} - 2 \binom{3n}{n-1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$

We vinden door toepassen der optelregel de relaties

$$\begin{aligned}
 -b_0 &= a_0 \\
 b_1 &= a_0 \\
 -b_2 &= a_0 + a_1 \\
 b_3 &= a_0 + 4a_1 \\
 -b_4 &= a_0 + 10a_1 + a_2 \\
 b_5 &= a_0 + 20a_1 + 7a_2 \\
 -b_6 &= a_0 + 35a_1 + 28a_2 + a_3 = \binom{6}{0}a_0 + \binom{7}{1}a_1 + \binom{8}{2}a_2 + \binom{9}{3}a_3 \\
 b_7 &= a_0 + 56a_1 + 84a_2 + 10a_3 = \binom{7}{0}a_0 + \binom{8}{1}a_1 + \binom{9}{2}a_2 + \binom{10}{3}a_3
 \end{aligned}$$

of

$$(157) \quad (-)^{m+1} b_m = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+j}{m-2j} a_j.$$

Dan is dus

$$\begin{aligned}
 (-)^{m+1} b_m &= \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+j}{m-2j} \binom{3j}{j} \frac{1}{2j+1} = \\
 &= \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+j}{m} \binom{m}{2j} \frac{1}{2j+1} = \\
 (158) \quad &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+j}{m} \binom{m+1}{2j+1} = \\
 &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m+j}{m} \binom{m+1}{m-2j} = \\
 &= \frac{1}{m+1} \left\{ \text{coefficient van } t^m \text{ in } \frac{1}{(1-t^2)^{m+1}} (1+t)^{m+1} \right\} = \\
 &= \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} = \binom{2m-1}{m-1} - \binom{2m-1}{m-2} \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}.
 \end{aligned}$$

Hierbij is gebruikt

$$(159) \quad \binom{2m}{m} = \binom{2m-1}{m-1} - \binom{2m-1}{m-2} \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}.$$

$$(159) \quad \frac{1}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m-1}{j} (-t)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j}{m} t^j$$

en

$$(160) \quad (1+t)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} t^k.$$

Geval III. Neem

$$(161) \quad r_1 = 1, r_2 = 3 \text{ en } i < 0.$$

Voor $i = -1$ vinden we fig.7.

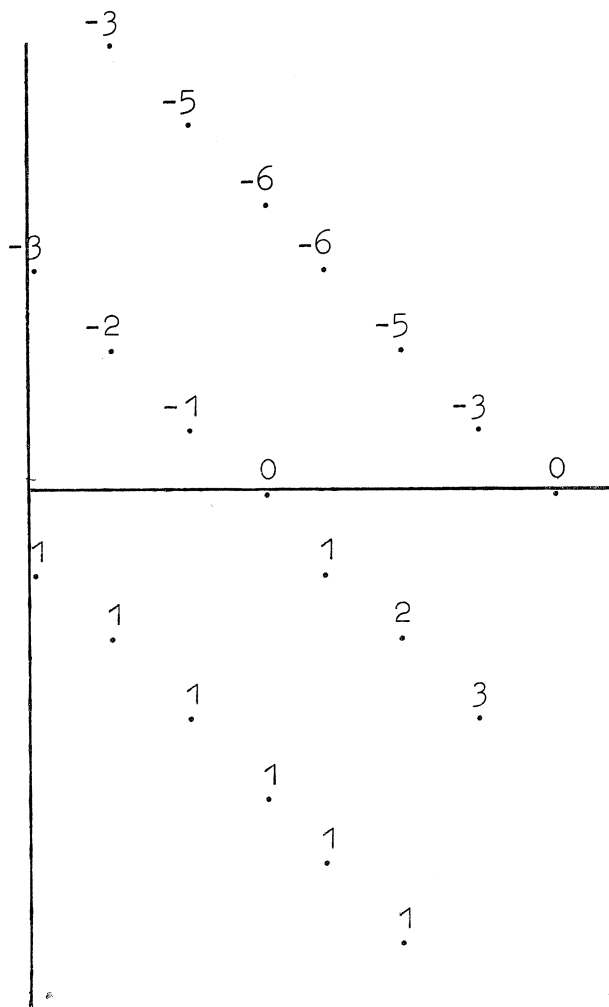


fig.7

Het aantal paden van -1 op de verticale as naar een punt beneden de horizontale as, die beneden die as blijven, staat aangegeven. De getallen op en boven de horizontale as dienen om de optelregel algemene geldigheid te geven. Alleen in 3 op de verticale as is -3 nodig. Er geldt namelijk voor $n \geq 0$

$$(162) \quad \binom{4n+3}{n+1} = 3 \binom{4n+3}{n}.$$

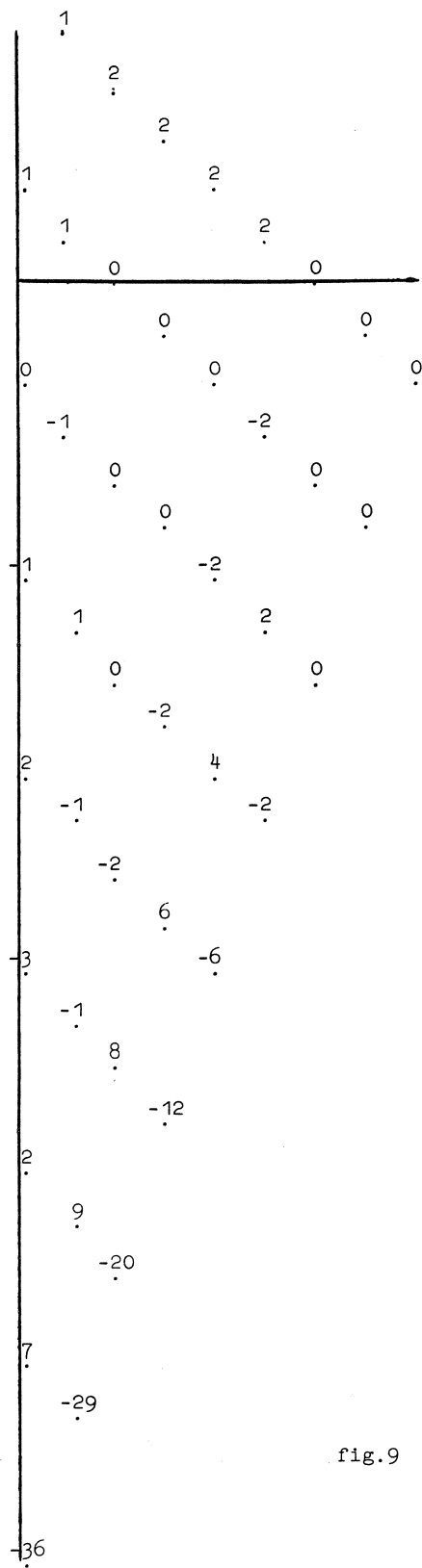
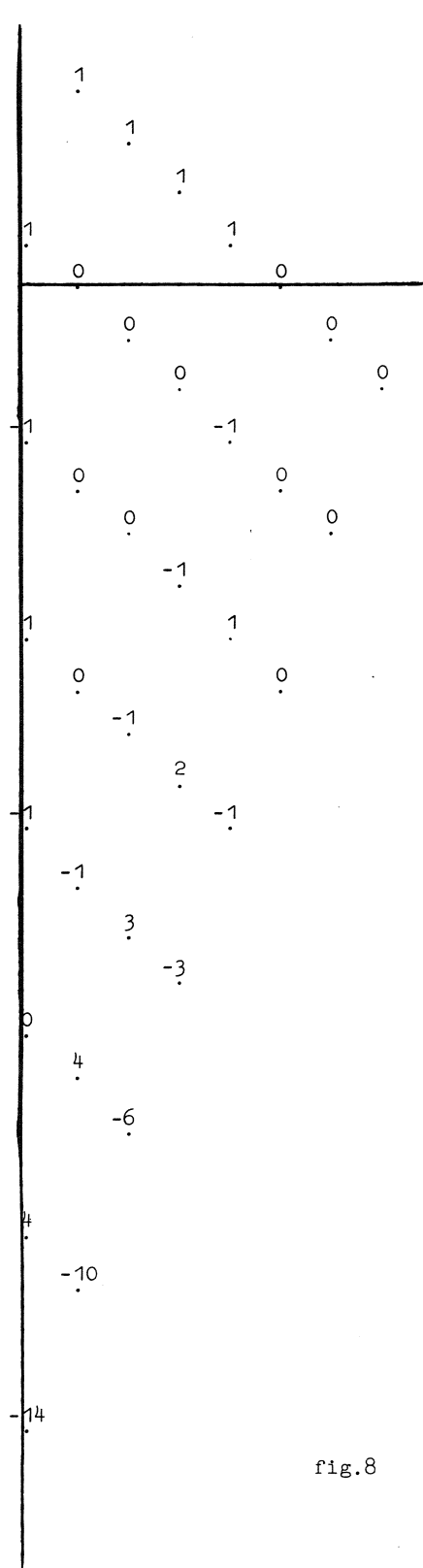
Uit fig.7 volgen ook de bij $i = -2$, $i = -3$ en $i = -4$ behorende aantallen. Opschuiven der verticale as en aftrekken van de resulterende figuren geeft het antwoord voor andere negatieve i -waarden.

Ook hier beschouwen we vervolgens het probleem voor $i > 0$. In fig.8 en fig.9 staan boven de horizontale as de bij $i = 1$ resp. $i = 2$ passende aantallen. We zien, dat de compenserende getallen op de verticale as niet meer alternerend zijn en het is nu niet meer zo eenvoudig een algemene formule voor deze getallen aan te geven. Wel is direct duidelijk, dat de compenserende getallen op de verticale as bestaan. De getallen $1, 1, 4, 22, \dots$ op hoogte 1 boven de horizontale as in fig.8, genoteerd: $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, vinden we terug in fig.7 op hoogte -1 . Er geldt dus

$$(163) \quad a_n = \binom{4n}{n} - 3 \binom{4n}{n-1} = \frac{1}{3n+1} \binom{4n}{n}.$$

De compenserende getallen in de roosterpunten $(0, -3)$, $(0, -7)$, $(0, -11)$, $(0, -15), \dots$ op de verticale as geven we aan met $b_0, b_1, b_2, \dots$. Nu blijkt

$$\begin{array}{ll} -b_0 = a_0 & -b_4 = a_0 - 5 a_1 \\ b_1 = a_0 & b_5 = a_0 - 15 a_1 \\ -b_2 = a_0 & -b_6 = a_0 - 35 a_1 + a_2 \\ b_3 = a_0 - a_1 & b_7 = a_0 - 70 a_1 + 9 a_2 \\ & -b_8 = a_0 - 126 a_1 + 45 a_2 \end{array}$$



of algemeen

$$\begin{aligned}
 b_n &= (-)^{n+1} \left\{ \binom{n}{n} a_0 - \binom{n+1}{n-3} a_1 + \binom{n+2}{n-6} a_2 - \dots \right\} = \\
 &= (-)^{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n+j}{n-3j} (-)^j a_j = \\
 &= (-)^{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n+j}{n-3j} (-)^j \frac{1}{3j+1} \binom{4j}{j} = \\
 (165) &= (-)^{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n+j}{n} \binom{n}{3j} \frac{(-)^j}{3j+1} = \\
 &= \frac{(-)^{n+1}}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n+j}{n} \binom{n+1}{3j+1} (-)^j = \\
 &= \frac{(-)^{n+1}}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n+j}{n} \binom{n+1}{n-3j} (-)^j = \\
 &= \frac{(-)^{n+1}}{n+1} \left\{ \text{coefficient van } t^n \text{ in } \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} (1+t)^{n+1} = \right. \\
 &\quad \left. = \frac{1}{(1-t+t^2)^{n+1}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Deze uitdrukking voor b_n is minder handelbaar dan (158): het berekenen van de compenserende getallen op de verticale as is nu niet zo eenvoudig.

Geval IV. Neem

$$(166) \quad r_1 = 2, r_2 = 3 \text{ en } i < 0.$$

We beschouwen slechts $i = -1$. Compensatie op de verticale as geeft fig.10. Het analoge probleem met $i = 1$ geeft bij compensatie op de verticale as fig.11. In fig.10 is de

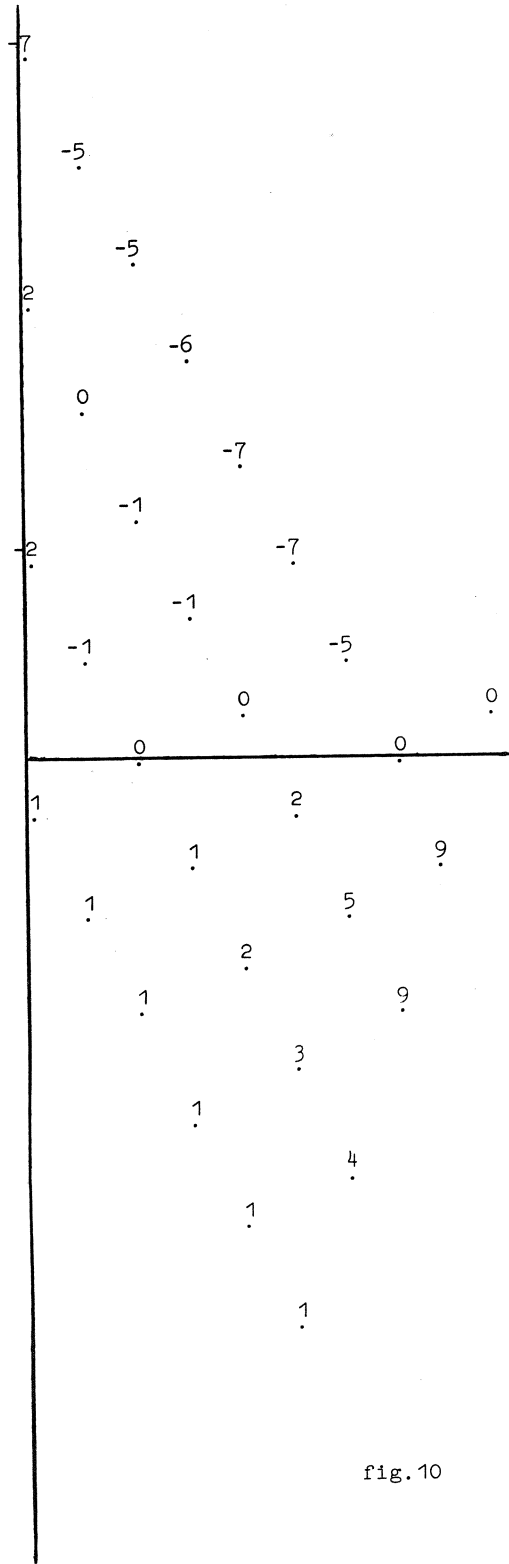


fig. 10

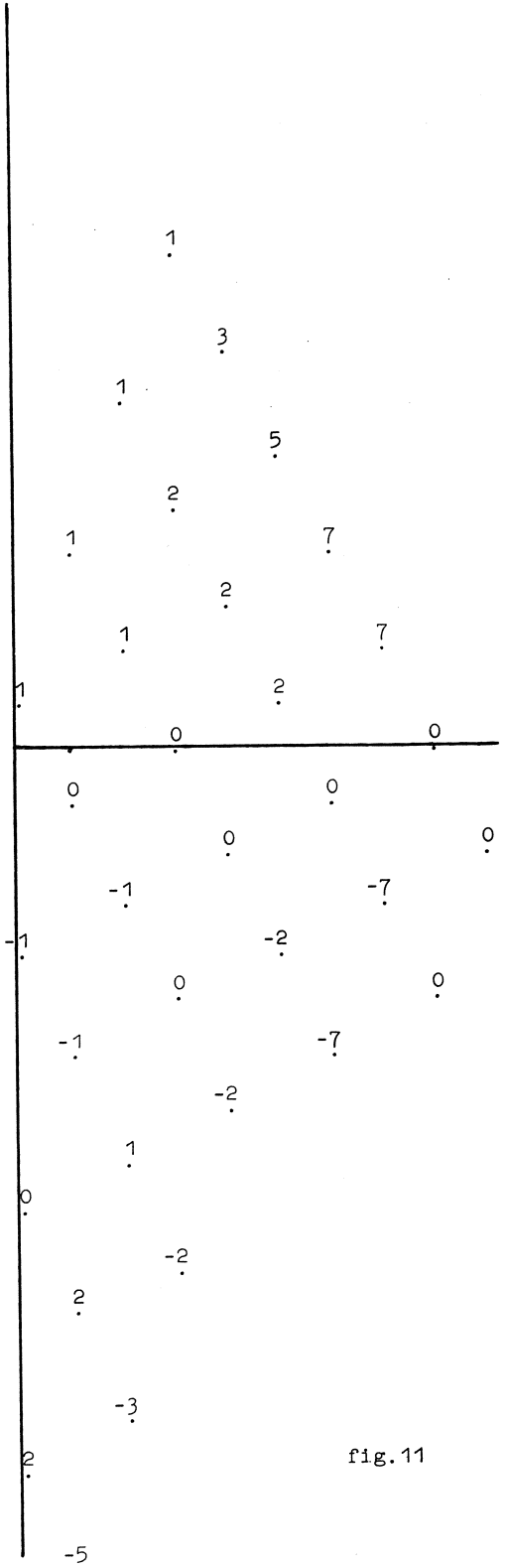


fig. 11

optelregel alleen van kracht als we door compensatie bereiken dat zowel op de as als op hoogte 1 boven de as uitsluitend nullen voorkomen, in fig. 11 is zelfs een barrière van drie rijen nullen nodig. In het algemeen geldt in elke situatie met $p_{-3} \neq 0$ en $p_{-j} = 0$ voor $j > 3$, dat drie rijen nullen (op de as en op hoogten 1 en 2 erboven) nodig en voldoende zijn om de getallen onder de as met de optelregel te kunnen bepalen.

We kunnen onze eisen voor fig. 10 ook zó formuleren: op elke lijn met richtingscoëfficiënt -2 (dus evenwijdig aan de rij énen die begint in $i = -1$) moet op of direct boven de as een nul staan. In figuur 11 vindt men deze nul op of direct onder de as op elke lijn met richtingscoëfficiënt 2 (evenwijdig aan de rij énen door $i = 1$). Het is duidelijk dat de compenserende getallen op de verticale as nu nog moeilijker te bepalen zijn. Het werken met genererende functies lijkt hier geen resultaat te geven.

4. Toelichting op de compensatiemethode

Hoe kunnen we het succes van de compensatiemethode verklaren? Dit doen we aan de hand van een voorbeeld met met als enige beperkingen

$$(167) \quad p_k = 0 \text{ voor } k < -2 \text{ en } p_{-2} \neq 0.$$

We gaan er als steeds van uit, dat

$$(168) \quad p_{h-k}^{(n)} = P\{s_n = h / s_0 = k\}$$

voor alle gehele $n \geq 0$, k en h bekend is. Er geldt voor positieve k en h

$$(169) \quad p_{h-k}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} P\{s_n = h, s_1 \notin \{0, -1\}, \dots, s_{i-1} \notin \{0, -1\}, s_i = 0 / s_0 = k\} + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} P\{s_n = h, s_1 \notin \{0, -1\}, \dots, s_{i-1} \notin \{0, -1\}, s_i = -1 / s_0 = k\} + q_{kh}^{(n)} \\ = \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} p_h^{(n-i)} + \sum_{i=1}^{n-1} b_k^{(i)} p_{h+1}^{(n-i)} + q_{k,h}^{(n)},$$

waarbij we als afkortingen gebruikten

$$(170) \quad a_k^{(i)} = P\{s_1 \notin \{0, -1\}, \dots, s_{i-1} \notin \{0, -1\}, s_i = 0 / s_0 = k\} \\ b_k^{(i)} = P\{s_1 \notin \{0, -1\}, \dots, s_{i-1} \notin \{0, -1\}, s_i = -1 / s_0 = k\} \\ q_{k,h}^{(n)} = P\{s_1 \notin \{0, -1\}, \dots, s_{n-1} \notin \{0, -1\}, s_n = h / s_0 = k\}.$$

Dus geldt de compensatie-relatie

$$(171) \quad q_{k,h}^{(n)} = p_{h-k}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} (-a_k^{(i)}) \cdot p_h^{(n-i)} + \sum_{i=1}^{n-1} (-b_k^{(i)}) \cdot p_{h+1}^{(n-i)}.$$

Tevens kunnen we de $a_k^{(i)}$ en $b_k^{(i)}$ bepalen, door bij vaste k het equivalent van (169) op te schrijven voor $h=0$ en $h=-1$. I.p.v. $q_{k,h}^{(n)}$ komt dan $a_k^{(n)}$ resp. $b_k^{(n)}$ en uit de resulterende relaties

$$(172) \quad \begin{cases} p_{-k}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} p_0^{(n-i)} + \sum_{i=1}^{n-1} b_k^{(i)} p_1^{(n-i)} + a_k^{(n)} \\ p_{-k-1}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} p_{-1}^{(n-i)} + \sum_{i=1}^{n-1} b_k^{(i)} p_0^{(n-i)} + b_k^{(n)} \end{cases}$$

kunnen achtereenvolgens $a_1^{(n)}$ en $b_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}$ en $b_2^{(n)}$, enz. opgelost worden (in principe).

Een volkomen analoge gang van zaken vinden we bij negatieve k en h bij de bepaling van

$$(173) \quad q_{k,h}^{(n)} = P\{s_1 \notin \{0,1\}, s_2 \notin \{0,1\}, \dots, s_{n-1} \notin \{0,1\}, s_n = h/s_0 = k\}.$$

Het aantal rijen compenserende getallen is blijkbaar gelijk aan de maximale staplengte in negatieve richting (of in positieve richting, als die maximale lengte kleiner is).

Bestaat er nu alléén één enkele rij compenserende getallen, als er hetzij in positieve hetzij in negatieve richting slechts een stap van lengte 1 gemaakt kan worden? Strikt genomen wel, maar als we meer dan één rij onbekenden hebben, die allen bekend zijn zodra er één rij bekend is, dan is er in feite slechts één rij onbekenden: Stel, dat gegeven is

$$(174) \quad \begin{cases} p_k = p_{-1} q^{-k-1} & \text{voor } k = -1, -2, \dots \\ p_k & \text{willekeurig voor } k \geq 0, \end{cases}$$

dan geldt voor $k > 0$ en $h > 0$

$$\begin{aligned} (175) \quad p_{h-k}^{(n)} &= P\{s_n = h/s_0 = k\} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{i=1}^{n-1} P\{s_1 \notin (-\infty, 0], \dots, s_{i-1} \notin (-\infty, 0], s_i = j, s_n = h/s_0 = k\} + q_{k,h}^{(n)} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{i=1}^{n-1} P\{s_1 \notin (-\infty, 0], \dots, s_{i-1} \notin (-\infty, 0], s_i = j/s_0 = k\} p_{h-j}^{(n-i)} + q_{k,h}^{(n)} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{i=1}^{n-1} P\{s_1 \notin (-\infty, 0], \dots, s_{i-1} \notin (-\infty, 0], s_i = 0/s_0 = k\} q^{-j} p_{h-j}^{(n-i)} + q_{k,h}^{(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} \sum_{j=-\infty}^0 q^{-j} p_{h-j}^{(n-i)} + q_{k,h}^{(n)}. \end{aligned}$$

Hierbij gebruikten we de afkortingen

$$(176) \begin{cases} a_k^{(i)} = P\{s_1 \notin (-\infty, 0], \dots, s_{i-1} \notin (-\infty, 0], s_i = 0 / s_0 = k\} \\ q_{k,h}^{(n)} = P\{s_1 \notin (-\infty, 0], \dots, s_{n-1} \notin (-\infty, 0], s_n = h / s_0 = k\}. \end{cases}$$

Voor $h=0$ volgt voor vaste $k > 0$ en alle $n \geq 1$

$$(177) \quad p_{-k}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} \sum_{j=-\infty}^0 q^{-j} p_{-j}^{(n-i)} + a_k^{(n)}.$$

Het is duidelijk dat (177) ook geldt voor $k=0$.

Voorbeeld: in overeenstemming met (174) kiezen we

$$(178) \quad \begin{cases} p_k = pq^{r-k} & \text{voor } k \leq r \text{ (vaste } r > 0), \\ p_k = 0 & \text{voor } k > r. \end{cases}$$

Nu geldt voor $|w| > q$

$$(179) \quad \Psi(w) = \sum_{k=-\infty}^r pq^{r-k} w^k = \sum_{j=0}^{\infty} pq^j w^{r-j} = \frac{pw^r}{1 - \frac{q}{w}},$$

zodat

$$(180) \quad \begin{aligned} \{\Psi(w)\}^n &= \frac{p_w^{n,rn}}{(1 - \frac{q}{w})^n} = p_w^{n,rn} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} \left(-\frac{q}{w}\right)^j = \\ &= p_w^{n,rn} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} q^j w^{-j} = \sum_{k=-\infty}^{rn} \binom{(r+1)n-k-1}{rn-k} p_q^{n,rn-k} w^k \end{aligned}$$

of

$$(181) \quad p_k^{(n)} = \binom{(r+1)n-k-1}{rn-k} p_q^{n,rn-k} \text{ voor } k \leq rn.$$

Voor $k \geq 0$ geldt

$$(182) \quad \begin{aligned} p_{-k}^{(n)} &= \binom{(r+1)n+k-1}{rn+k} p_q^{n,rn+k} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} \sum_{j=-\infty}^0 q^{-j} \binom{(r+1)(n-i)+j-1}{r(n-i)+j} p_q^{n-i,r(n-i)+j} + a_k^{(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} p_q^{n-i,r(n-i)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(r+1)(n-i)-j-1}{r(n-i)-j} + a_k^{(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_k^{(i)} p_q^{n-i,r(n-i)} \binom{(r+1)(n-i)}{r(n-i)} + a_k^{(n)}, \end{aligned}$$

dus voor $k \geq 0$ geldt

$$(183) \quad \binom{(r+1)n+k-1}{rn+k} p^n q^{rn+k} = \sum_{i=1}^n a_k^{(i)} p^{n-i} q^{r(n-i)} \binom{(r+1)(n-i)}{r(n-i)},$$

of met genererende functies

$$(184) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{(r+1)n+k-1}{rn+k} p^n q^{rn+k} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_k^{(i)} p^{n-i} q^{r(n-i)} \cdot \binom{(r+1)(n-i)}{r(n-i)} x^{n-1}.$$

of

$$(185) \quad pq^{r+k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{(r+1)n+k+r}{n} (pq^r x)^n = \sum_{i=1}^{\infty} a_k^{(i)} x^{i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{(r+1)n}{n} (pq^r x)^n.$$

In l'Enseignement Mathématique van 1921 geeft Pólya (op blz. 38-47, Sur les séries entières, dont la somme est une fonction algébrique) de volgende relatie:

Lemma: Kies voor gegeven reële α en β met $\beta \geq 0$ een getal ε met $0 < \varepsilon < 1$ en kies x zo dat

$$(186) \quad |x| < \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^\beta};$$

dan geldt:

$$(187) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta n}{n} x^n = \frac{(1+z_0)^\alpha}{1-\beta x(1+z_0)^{\beta-1}},$$

waarin $z_0 = z_0(x, \beta)$ de enige wortel van $z - x(1+z)^\beta = 0$ is, die voldoet aan $|z_0| < \varepsilon$ als (186) vervuld is.

Bewijs:

$$\begin{aligned} (188) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta n}{n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{(1+z)^{\alpha+\beta n}}{z^{n+1}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^\alpha}{z} \frac{1}{1-x(1+z)^\beta} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^\alpha}{z-x(1+z)^\beta} dz = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(1+z)^\alpha (z-z_0)^{\frac{z}{\beta}}}{z-x(1+z)^\beta} = \frac{(1+z_0)^\alpha}{1-\beta x(1+z_0)^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

De bewering over $z_0(x, \beta)$ volgt uit de stelling van Rouché genoemd op blz. 3.

Gevolg: Uit

$$(189) \quad \frac{(1+z_0)^\alpha}{1-\beta x(1+z_0)^{\beta-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta n}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha+\beta n}{n} \binom{\alpha-1+\beta n}{n} x^n$$

en

$$(190) \quad \frac{\beta x(1+z_0)^{\alpha+\beta-1}}{1-\beta x(1+z_0)^{\beta-1}} = \beta x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta-1+\beta n}{n} x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \beta \binom{\alpha-1+\beta m}{m-1} x^m$$

volgt door aftrekken

$$(191) \quad (1+z_0)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n} \binom{\alpha-1+\beta n}{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha+\beta n} \binom{\alpha+\beta n}{n} x^n.$$

Door toepassen van (187) op linker- en rechterlid van (185) volgt

$$(192) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_k^{(i)} x^{i-1} = pq^{r+k} \left\{ 1+z_0(pq^r x, r+1) \right\}^{k+r},$$

waarbij z_0 de oplossing is van

$$(193) \quad z_0 - pq^r x(1+z_0)^{r+1} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow 0} z_0 = 0.$$

Wegens (191) geldt dus

$$(194) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_k^{(i)} x^{i-1} = pq^{r+k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k+r}{k+r+(r+1)n} \binom{k+r+(r+1)n}{n} \cdot (pq^r x)^n.$$

of

$$(195) \quad a_k^{(i)} = q^k (pq^r)^i \frac{k+r}{k+(r+1)i-1} \binom{k+(r+1)i-1}{i-1} \quad \text{voor } i \geq 1.$$

5. Keilson's tweede methode

Wanneer compensatie op de verticale as moeilijkheden oplevert, kunnen we proberen op de horizontale as te compenseren. Tot nu toe hebben we het ongestoorde proces ge-

mengd met eveneens ongestoorde processen die op het tijdstip nul in passende uitgangspunten aan de andere kant van de as begonnen. De nieuwe aanpak geeft het ongestoorde proces a.h.w. alleen een correctie op latere tijdstippen, en wel telkens als het de as dreigt te overschrijden.

Als eerste voorbeeld beschouwen we geval III voor $i=1$ (fig. 8, blz. 39). De getallen a_n op hoogte 1 boven de horizontale as voldoen aan (163). Als we nu met deze getallen compenseren op de horizontale as, zodat daar alleen de waarde 0 komt, en we plaatsen beneden de as uitsluitend nullen, dan komt het gedeelte boven de as van fig. 8 weer te voorschijn. Analooft voor fig. 9.

De getallen a_n voor fig. 8 zijn gevonden door vergelijking met fig. 7, maar de compensaties op de horizontale as kunnen ook direct bepaald worden. Wil het gedeelte boven de as van fig. 8 ontstaan door compensatie met $-c_n$ in het punt $(4n+1, 0)$, dan moet gelden

$$(196) \quad \binom{4n+1}{n} = c_0 \binom{4n}{n} + c_1 \binom{4(n-1)}{n-1} + \dots + c_{n-1} \binom{4}{1} + c_n \binom{0}{0}.$$

Maar dan is

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n+1}{n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{4(n-j)}{n-j} x^n = \\ (197) \quad &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} \binom{4(n-j)}{n-j} x^{n-j} \right) x^j = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n. \end{aligned}$$

Hierop wordt het lemma van Pólya (187) toegepast en dan

(191):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n+1}{n} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n} = \\ (198) \quad &= 1 + z_0(x, 4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+4n} \binom{1+4n}{n} x^n, \end{aligned}$$

zodat voor $n \geq 0$ geldt

$$(199) \quad c_n = \frac{1}{4n+1} \binom{4n+1}{n}.$$

Voor de compensaties $-d_n$ in $(4n+2, 0)$ in fig. 9 vinden we analoog ($n \geq 0$):

$$(200) \quad d_n = \frac{1}{4n+2} \binom{4n+2}{n}.$$

Met deze compensatie op de horizontale as kunnen we alle getallen boven die as in fig. 8 en 9 vinden met de optelregel.

Vervolgens beschouwen we geval IV (fig. 10 voor $i=1$, fig. 11 voor $i=1$). In fig. 10 compenseren we met $-a_n$ in het punt $(5n+2, 0)$ en met $-b_n$ in het punt $(5n+4, 1)$. Dan volgt

$$(201) \quad \begin{aligned} & \binom{2}{1} a_0 + \binom{1}{1} b_0 = \binom{2}{1} \\ & \binom{5}{2} a_0 + \binom{3}{1} b_0 + a_1 = \binom{7}{3} \\ & \binom{7}{3} a_0 + \binom{5}{2} b_0 + \binom{2}{1} a_1 + b_1 = \binom{9}{4} \end{aligned}$$

of

$$(202) \quad \sum_{j=0}^n \binom{5(n-j)}{2(n-j)} a_j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{5(n-j)-2}{2(n-j)-1} b_j = \binom{5n+2}{2n+1}$$

en

$$(203) \quad \sum_{j=0}^n \binom{5(n-j)+2}{2(n-j)+1} a_j + \sum_{j=0}^n \binom{5(n-j)}{2(n-j)} b_j = \binom{5n+4}{2n+2}.$$

Nemen we genererende functies, dan volgt

$$(204) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{2n} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+3}{2n+2} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+2}{2n+1} x^n \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+2}{2n+1} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{2n} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+4}{2n+2} x^n. \end{aligned} \right.$$

Uit deze twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden kunnen we voor de machtreeksen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ een uitdrukking vinden. De vraag blijft echter open, of het mogelijk is a_n en b_n expliciet aan te geven.

Men zou verwachten, dat de getallen boven de as in fig. 11 nog moeilijker tevoorschijn komen, daar bij de compensatie op de verticale as een rij nullen méér vereist was. Dit blijkt niet het geval! Als we in fig. 11 compenseren met a_n in $(5n+1, -1)$ en met b_2 in $(5n+3, 0)$, dan vinden we analoog aan het boven behandelde

$$(205) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{2n} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+3}{2n+2} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{2n} x^n \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+2}{2n+1} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{2n} x^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+3}{2n+1} x^n. \end{aligned} \right.$$

Alléén de bekende rechterleden zijn dus anders!

Geval V. Volledigheidshalve beschouwen we ook een probleem met twee randen. Neem in (141)

$$(206) \quad r_1 = r_2 = 1$$

en kies de randen in u en $-v$ met u en v positief geheel, terwijl met (kans) 1 in de oorsprong gestart wordt. In fig. 12 is $u=3$ en $v=1$. De A-spiegel in u geeft als beeld van de oorsprong het punt $2u$, dit wordt door de B-spiegel in $-v$ gespiegeld tot $-2u-2v$, dat in de A-spiegel wordt tot $4u+2v$, enz. Dit geeft de rij $0, 2u, -2u-2v, 4u+2v, \dots$. Evenzo volgt, door eerst de B-spiegel te gebruiken, de rij $0, -2v, 2u+2v, -2u-4v$. Al deze punten ontstaan, door

fig. 12

bij 0 achtereenvolgens $2u, 2v, 2u, 2v, \dots$ op te tellen en van 0 achtereenvolgens $2v, 2u, 2v, 2u, \dots$ af te trekken. Als we het getal $+1$ in de punten $(0, 2j(u+v))$ plaatsen voor $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ en het getal -1 in de punten $(0, 2u+2j)(u+v)$ voor dezelfde j 's, verwachten we intuïtief een optelresultaat 0 op de spiegels. Op de A-spiegel vinden we in het punt $(u+2k, u)$ als bijdrage afkomstig van de punten waar $+1$ ligt

$$(207) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{u+2k}{k+j(u+v)}$$

en als bijdrage afkomstig van de punten waar -1 ligt

$$(208) \quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{u+2k}{k+u+j(u+v)} = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{u+2k}{k-j(u+v)}.$$

Inderdaad heffen deze bijdragen elkaar op voor $k=0, 1, 2, \dots$. Voor de B-spiegel geldt hetzelfde in elk punt $(v+2k, -v)$.

Hoewel op deze wijze de getallen tussen de spiegels teruggevonden kunnen worden, willen we toch liever rechtstreeks compensatie op de randen zelf toepassen. Plaats daartoe de getallen $-a_0, -a_1, \dots$ in $(u, u), (u+2, u), \dots$ en de getallen $-b_0, -b_1, \dots$ in $(v, -v), (v+2, -v)$. Dan volgt met compensatie in de A-spiegel:

$$(209) \quad \begin{array}{lll} \binom{0}{0}a_0 & & = \binom{u}{0} \\ \binom{2}{1}a_0 + \binom{0}{0}a_1 & & = \binom{u+2}{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{2v}{v}a_0 + \dots & + \binom{0}{0}a_v + & \binom{u+v}{0}b_0 = \binom{u+2v}{v} \\ \binom{2v+2}{v+1}a_0 + \dots & + \binom{0}{0}a_{v+1} + \dots + \binom{u+v+2}{1}b_0 + \binom{u+v}{0}b_1 = & \binom{u+2v+2}{v+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

of algemeen

$$(210) \quad \binom{2n}{n} a_0 + \dots + \binom{0}{0} a_n + \binom{2n+u-v}{n-v} b_0 + \dots + \binom{u+v}{0} b_{n-v} = \binom{2n+u}{n}$$

of

$$(211) \quad \sum_{j=0}^n \binom{2(n-j)}{n-j} a_j + \sum_{j=0}^{n-v} \binom{2(n-j)+u-v}{n-j-v} b_j = \binom{2n+u}{n}.$$

Symmetrie geeft dan ter compensatie op de B-spiegel

$$(212) \quad \sum_{j=0}^{n-u} \binom{2(n-j)+v-u}{n-j-u} a_j + \sum_{j=0}^n \binom{2(n-j)}{n-j} b_j = \binom{2n+v}{n}.$$

Gaan we over op genererende functies, dan volgt voor

$$a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \text{en} \quad b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

$$(213) \quad \begin{cases} a(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n + x^v b(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+u+v}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+u}{n} x^n, \\ x^u a(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+u+v}{n} x^n + b(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+v}{n} x^n. \end{cases}$$

Met (187) volgt

$$(214) \quad a(x) = \frac{(1+z_0) \{1-x^v(1+z_0)^{2v}\}}{1-x^{u+v}(1+z_0)^{2n+2v}},$$

waarbij z_0 voldoet aan

$$(215) \quad z_0 - x(1+z_0)^2 = 0$$

met $\lim_{x \rightarrow 0} z_0 = 0$. Dan geldt

$$(216) \quad 1+z_0 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$$

en

$$(217) \quad x(1+z_0)^2 = z_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}}.$$

Hiermee volgt (vergelijk met Feller, blz. 319/320 in de tweede druk)

$$(218) \quad \begin{cases} a(x) = \frac{(1+z_0)^u (1-z_0^v)}{1-z_0^{u+v}} \\ b(x) = \frac{(1+z_0)^v (1-z_0^u)}{1-z_0^{u+v}} \end{cases}$$

Dit vrij onhandelbare antwoord kan in een overzichtelijker vorm aldus verkregen worden: a_k is het getal in $(u+2k-1, u-1)$ en wordt dus gegeven door

$$(219) \quad a_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{u+2k-1}{k+j(u+v)} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{u+2k-1}{k+u+j(u+v)} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

op grond van de spiegelmethode. Analoog geldt

$$(220) \quad b_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{v+2k-1}{k+j(u+v)} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{v+2k-1}{k+v+j(u+v)}.$$

Vergelijk ook met Feller, opgaven 7, 8, 9, 12 en 13 op blz. 335/336 in de tweede druk.

De tweede compensatietechniek van Keilson is equivalent met het toepassen van eenvoudige relaties tussen bepaalde kansen. In de voorbeelden, o.a. geval IV met fig. 10 en 11, bleek het voor toepassing van de optelregel nodig en voldoende een aantal horizontale rijen nullen te maken. Laat T de verzameling van toestanden zijn waarmee deze rijen corresponderen; in de behandelde voorbeelden had T één, twee of drie elementen. Kemperman heeft een algemene verzameling $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ van eindig veel toestanden beschouwd.

We zullen tenslotte nog enige formules afleiden voor een T bestaande uit één toestand ($m=1$) in een situatie waarbij alleen sprongen van r stappen omhoog of s stappen omlaag zijn toegelaten. In Kemperman's notatie geldt dan

$$(221) \quad \Psi(w) = qw^{-s} + pw^r \quad (p+q=1),$$

zodat

$$(222) \quad \{\Psi(w)\}_j^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q p^{j n - j w - j s + (n-j)r} =$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}_q p^{j n - j w n r - j(r+s)}$$

of

$$(223) \quad p_{nr-j(r+s)}^{(n)} = \binom{n}{j}_q p^{j n - j} \quad \text{voor } 0 \leq j \leq n.$$

Neem $r+s=5$. Voor $k \neq 0$ geldt (zie (13))

$$(224) \quad F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_k^{(n)} x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_k^{(n)} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_0^{(n)} x^n},$$

zodat

$$(225) \quad r=1 \Rightarrow F_1(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{n}_q p^{4n+1} x^{5n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{n}_q p^{4n} x^{5n}} =$$

$$= p x \{1 + z_0(q p^4 x^5, 5)\} = p x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+5n} \binom{1+5n}{n} (q p^4 x^5)^n$$

$$(226) \quad r=2 \Rightarrow F_2(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{2n}_q p^{2n} p^{3n+1} x^{5n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{2n}_q p^{2n} p^{3n} x^{5n}} = ?$$

$$(227) \quad r=3 \Rightarrow F_3(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{3n}_q p^{3n} p^{2n+1} x^{5n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{3n}_q p^{3n} p^{2n} x^{5n}} = ?$$

$$(228) \quad r=4 \Rightarrow F_4(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{4n}_q p^{4n} p^{n+1} x^{5n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{4n}_q p^{4n} p^n x^{5n}} =$$

-56-

$$\begin{aligned}
 &= \frac{px \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n+1}{n+1} (q^4 px^5)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{n} (q^4 px^5)^n} = \\
 &= \frac{1}{q^4 x^4} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n-4}{n} (q^4 px^5)^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{5n}{n} (q^4 px^5)^n} = \frac{(1+z_0)^{-4} - \{1 - 5q^4 px^5 (1+z_0)^4\}}{q^4 x^4} = \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{-4+5n} \binom{-4+5n}{n} (q^4 px^5)^{n-1} + 5q^4 px^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{4+5n} \binom{4+5n}{n} (q^4 px^5)^n}{q^4 x^4} = \\
 &= px \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{-4}{1+5n} \binom{1+5n}{1+n} + \frac{20}{4+5n} \binom{4+5n}{n} \right\} (q^4 px^5)^n.
 \end{aligned}$$

Errata in rapport S323 (colloquium waarschijnlijkheids-
rekening)

blz.	regel	staat	moet staan:
1	2 v.o.	i_{n-n}	i_{n-2}
3	10 v.b.	(w)	$\Psi(w)$
5	8 v.b.	$ p_{-r^z} $	p_{-r^z}
8	8 v.o.	$\frac{1}{2\pi i}$	$\frac{1}{2\pi i} \oint$
12	form. 56	$\frac{(v_t)^n}{n}$	$\frac{(v_t)^n}{n!}$
18	form. 94	tp_{-1}	$\sqrt{tp_{-1}}$
22	4 en 3 v.o.	$\underline{s}$	$\underline{s}$
22	2 v.o.	$k=0$	$k \leq 0$

